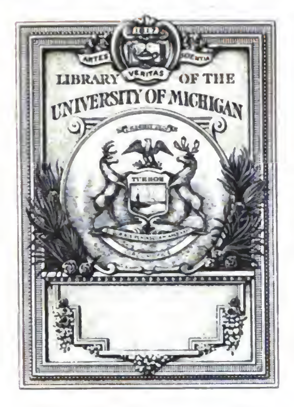
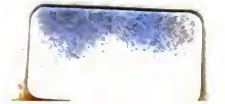
image
not
available


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



HANDBUCH
FÜR
DIE ANWENDUNG
DER
REINEN MATHEMATIK.

EINE
SYSTEMATISCHE SAMMLUNG
DER
FORMELN, AUSDRÜCKE UND HÜLFSZAHLEN
AUS DER
EBENEN UND KÖRPERLICHEN GEOMETRIE, EBENEN, SPHÄRISCHEN UND ANALYTISCHEN TRIGONOMETRIE, ARITHMETIK, ALGEBRA, NIEDEREN UND HÖHEREN ANALYSIS, UND GEOMETRIE DER CURVEN.

ERSTER BAND.

BERLIN,
BEI FERDINAND DÜMMLER.

1827.

DIE FORMELN

DER

GEOMETRIE UND TRIGONOMETRIE.

BERLIN,
BEI FERDINAND DÜMMLER.
1827.

Einleitung.

Bei Ausarbeitung des Werkes welches hier dem mathematischen Publikum übergeben wird, hat dem Verfasser ein doppelter Zweck vor Augen gestanden.

In militärischen sowohl als bürgerlichen Verhältnissen sind die Fälle nicht selten, wo mathematische Rechnungen unmittelbar nöthig werden. Von den Personen welchen diese Geschäfte obliegen, kann nicht immer erwartet werden, daſs ihnen die Ableitung der dazu erforderlichen Formeln gegenwärtig, die Umgestaltung derselben für den bestimmten Zweck geläufig sey. Es setzt dieses eine Bekanntschaft mit den theoretischen Lehren und zugleich eine Uebung in analytischen Operationen voraus, die nicht billig von Männern gefordert werden darf, deren Beschäftigungen auf eine ganz andere Richtung angewiesen, nur zufällig und momentan mit mathematischen Arbeiten in Berührung kommen. Einen vorgelegten Ausdruck, eine geometrische oder trigonometrische Formel nach ihrem eigentlichen Sinne zu verstehen, und von derselben eine richtige Anwendung zu machen, ist hingegen eine Fähigkeit, welche allen denen eigen zu bleiben pflegt, die zu irgend einer Zeit einigermaſsen zu mathematischen Studien angehalten worden sind.

Mathematiker von Fach bedürfen allerdings solcher Hülfe nicht. Niemand hat aber wohl längere Zeit in mathematischen Arbeiten zugebracht, der nicht aus Erfahrung wüſste, wie viel Zeit durch Ableiten und Umwandeln oft ganz elementarer Ausdrücke verloren geht, es sey nun daſs man sich dieselben selbst bilde, oder sie aus irgend einem Lehrbuche zu entnehmen suche. Noch mehr steigert sich dieser Zeitverlust, sobald es darauf ankommt eine solche Formel durch numerische Entwickelung zur wirklichen Rechnung geschickt zu machen. Eben so kann es oft

sehr wesentlich seyn, alle Gestalten, deren ein gewisser Ausdruck fähig ist, auf einmal übersehen zu können, um unter denselben nach den Umständen die geeignete Wahl zu treffen. Die meisten Operationen der trigonometrischen Analysis sind in diesem Falle.

Dem Verfasser schien es, als ob diesem zweifachen Bedürfnisse zugleich abgeholfen werden könnte, wenn man die verschiedenen Theile der reinen Mathematik, soweit solches thunlich, in positiven Resultaten darstellte, und die daraus erwachsenden Formeln, Ausdrücke und Hülfszahlen consequent und systematisch geordnet zusammentrüge. Er verwahrt sich dabei ausdrücklich gegen die Auslegung, als habe er glauben können, die Mathematik liefse sich überhaupt auf ein wohlangelegtes System von Formularen und Rechnungsrecepten zurückführen. Vielmehr hat er die tiefe Ueberzeugung, dafs es allein der Geist und die Methode ist, welche den Werth dieser reichen Wissenschaft und ihren wahren Sinn für das Leben begründen. Dafs aber die Bedeutung einer Sprache allerdings an die innere Erkenntnifs und deren Ausdruck im lebendigen Worte geknüpft ist, hindert nicht, dafs es Wörterbücher gebe, die dem Gedächtnisse und dem Mangel an Uebung zu Hülfe kommen. Ein solches, ein Repertorium dessen, was man wohl thut da zu nehmen, wo es am schnellsten zu erlangen ist, wünschte der Verfasser für die Mathematik zu liefern.

Niemand kann übrigens besser wissen und fühlen wie weit diese Arbeit sowohl dem Entwurfe als der Ausführung nach, hinter dem zurückbleibt, was auf diesem Wege zu leisten sicher möglich ist. Wenn es hierüber einer Erklärung bedürfte, so würde der Verfasser diese vorzugsweise in der Neuheit der Sache suchen. Die Anordnung eines solchen Werkes ist nicht ohne Schwierigkeiten, die Ausführung sehr mühsam, ein erster Versuch jederzeit unvollkommen.

Dem in Obigem angedeuteten Plane zufolge, werden die den verschiedenen Zweigen der reinen Mathematik angehörigen Formeln in zwei Bänden zusammengestellt werden.

Der erste Band soll die Geometrie und Trigonometrie, der zweite die Arithmetik, Algebra, niedere und höhere Analysis, und Geometrie der Curven umfassen. Jeder dieser Bände ist von dem anderen unabhängig und kann nöthigen Falles als ein selbstständiges Ganze angesehen werden.

Die Eintheilung des ersten, hier erscheinenden Bandes erhellt aus folgender Uebersicht:

Erste Abtheilung — Geometrie:

1ster Abschnitt — Formeln zur ebenen Geometrie;

2ter Abschnitt — Formeln zur körperlichen Geometrie.

Zweite Abtheilung — Trigonometrie:

1ster Abschnitt — Formeln zur Auflösung der ebenen u. sphärischen Dreiecke;

2ter Abschnitt — Formeln zur trigonometrischen Analysis.

Einige Erläuterungen mögen hier nach der Reihefolge dieser Gegenstände ihre Stelle finden.

Die Einrichtung der sich auf ebene und körperliche Geometrie beziehenden Tafeln ist durch den bloſsen Anblick unmittelbar verständlich. Sie enthalten diejenigen ebenen Figuren und Körper, auf welche sich die mathematischen Rechnungen gewöhnlich zu erstrecken pflegen. Obgleich dabei auch noch einige, unter specielleren Bedingungen entstehende Körper in Betracht gezogen worden sind, so muſste man sich hier doch in engen Schranken halten, da das Feld solcher Untersuchungen ganz unbegrenzt ist, und für die Ausübung zu wenig Interesse darbietet.

Bei jedem dieser Figuren und Körper sind die Linien, Winkel, Flächen und Volumina durch willkührliche Buchstaben bezeichnet, und die Relation aller dieser Elemente durch eine Reihe von Formeln dargestellt worden. Es war dabei ursprünglich die Absicht alle Fälle ohne Ausnahme überall durchzuführen, so daſs die Columnen G e g e b e n — G e s u c h t keine der möglichen Combinationen entbehrten. Nur in einigen wenigen Fällen hat man sich erlaubt hiervon abzuweichen, entweder um höchst verwickelten und dadurch für die Praxis unbrauchbaren Ausdrücken, oder einer wenig Nutzen versprechenden Ueberfüllung zu entgehen. Bei Körpern die ohnehin nur unter ganz besonderen Umständen und deshalb selten vorkommen, schien es hinreichend, die Hauptformeln anzugeben; das Umwandeln dieser Formeln würde eine eben so beschwerliche als müſsige Arbeit gewesen seyn.

Eine fernere Absicht dieser Tafeln lag darin die aufgestellten Ausdrücke für die praktische Rechnung geschickt zu machen. Wo sich deshalb in den Formeln bestimmte Zahlen als Faktoren, Divisoren, Wurzelgröſsen u. ſ. w. zeigten, sind diese durch Ausführung der geforderten Operationen in einen einzigen Koeffizienten zu-

sammengezogen worden. Liefs der so veränderte Ausdruck wiederum eine logarithmische Behandlung zu, so sind diese Logarithmen gleichfalls beigebracht worden. Man hat sich dabei die Grenze gesetzt, die Koeffizienten sowohl als ihre Logarithmen stets auf 7 Decimalstellen anzugeben; nur bei den Rechnungen die sich auf Kreis und Kugel beziehen, wo zuweilen eine grofse Genauigkeit erforderlich werden kann, sind die Koeffizienten bis zur 12ten Stelle, und ihre Logarithmen mit 10 Ziffern aufgenommen. Dafs für die Logarithmen ächter Brüche die Bezeichnungsart gewählt worden, nach welcher die Logarithmen selbst positiv bleiben, und dagegen eine negative Hülfskennziffer hinzugefügt wird, schien für die praktische Rechnung geeigneter als der Gebrauch ganz negativer Logarithmen.

Die Einrichtung der, die Formeln zur Trigonometrie enthaltenden zweiten Abtheilung, wird gleichfalls ohne Schwierigkeit übersehen werden können. Wenn es scheinen sollte, als ob die Darstellung der trigonometrischen Analysis eine zu grofse Ausdehnung erhalten hätte, so ist zu bedenken, dafs eben hier das Bedürfnifs einer systematisch erschöpfenden Formeltafel am dringendsten war. Schwerlich ist selbst der geübtere Mathematiker im Stande, die verschiedenen Gestalten, welche ein trigonometrischer Ausdruck annehmen kann, sich zugleich zu vergegenwärtigen, und gleichwohl beruht eben hierauf der Gang aller Operationen der analytischen Trigonometrie. Man war daher stets gedrungen, irgendwo eine Zusammenstellung solcher Formeln aufzusuchen, und Cagnoli *Trig. rect. et sph.*, Lacroix Trigon., Klügel analyt. Trigon. und dessen Wörterbuch: Artikel Goniometrie, Vega Lehrbuch zweiter Theil und dessen log. trig. Tafeln, Salomon Trig., Euler *Introd. ad calc. diff.*, Schulz log. trig. Tafeln, Bonnycastle Trig., Lambert *Suppl. tab. log. et trig.*, Schweins Geometrie zweiter Theil u. s. w. sind in dieser Hinsicht viel gebraucht worden. Theils aber scheint keine der angeführten Tafeln die nöthige Vollständigkeit zu haben, um in allen Fällen Auskunft zu ertheilen, theils wird in denselben die strenge Ordnung vermifst, ohne welche ihr Gebrauch sehr beschwerlich ist. Bei Lehrbüchern, welche, wie die schätzbaren Werke von Schweins, Salomon, Unger u. A. eine vollständige Entwickelung der Wissenschaft zum Zwecke haben, liegt es ohnehin in der Natur der Sache, dafs sie jeden Ausdruck nur an der Stelle aufführen, wo er sich ihnen auf dem Wege, den sie für ihre Ableitungen gewählt hatten, von selbst ergiebt. Die hieraus entspringende Anordnung

der Materien ist aber von derjenigen, bei welcher alles Zusammengehörende unter gewissen, leicht übersichtlichen Rubriken zusammengestellt ist, gänzlich verschieden. Bei jenem Gange ist es eben so unthunlich, das Feld der möglichen Combinationen regelmäfsig und vollständig zu erschöpfen, als es bei einem Plane, wie der des vorliegenden Werkes, rathsam gewesen wäre, Wiederholungen zu vermeiden, die vielmehr überall eingetreten sind, wo sonst Unbequemlichkeiten bei dem Gebrauche der Tafeln entstanden wären.

Als ein besonderer Anhang zu dieser Abtheilung sind die Tafeln zur Auflösung der trigonometrischen Gleichungen anzusehen. Da die Reduction solcher Gleichungen, in welchen der zu suchende Bogen durch mehrere seiner Funktionen ausgedrückt erscheint, oft beschwerlichen Rechnungen unterworfen ist, so ist hier der Versuch gemacht worden, die möglichen Fälle bis zu einer gewissen Grenze allgemein darzustellen. Man hat sich dabei auf folgende zwei Klassen eingeschränkt: a) Gleichungen, die nur aus zwei Gliedern bestehen, und wo in jedem Gliede höchstens zwei verschiedene trigonometrische Funktionen als Faktoren vorkommen, und b) solche, wo aufser den zwei angeführten Gliedern, noch ein drittes Glied vorhanden ist, welches keine trigonometrische Funktion enthält. Was in diese beiden Haupt-Klassen fällt, ist für alle Fälle durchgeführt, nur sind in der zweiten Abtheilung die Combinationen der positiven und negativen Zeichen nicht geschehen, da man sehr leicht für jeden besonderen Fall, die betreffende Aenderung, eintreten lassen kann.

In allen Formeln, die sich auf Trigonometrie beziehen, ist der Radius = 1 angenommen worden. Sollte es unter besonderen Umständen nöthig werden, einen anderen Radius einzuführen, so dient hierzu das bekannte Gesetz der Homogenität aller Glieder einer trigonometrischen Gleichung.

Da der Verfasser bei dieser Arbeit überhaupt keinen anderen Zweck hatte, als der ausübenden Mathematik nützlich zu werden, bei Gegenständen dieser Art von eigener Erfindung ohnehin kaum die Rede sein kann, so hat er der Eitelkeit leicht entsagen können, Formeln selbst abzuleiten, die schon anderswo zu finden waren. Er hat daher Alles benutzt, was die ihm zugängliche mathematische Literatur für seinen Zweck Dienliches enthielte, und sich begnügt, das Vorgefundene passend zu gebrauchen und mit dem Ganzen in Einklang zu bringen. Eben so er-

kennt er dankbar die Unterstützung an, die ihm von mehreren Seiten gekommen; und hat dabei insbesondere den Königl. Ingenieur-Geographen Asimont zu nennen, einen ausgezeichneten jungen Mathematiker, dessen bereitwilligem Fleifse ein grofser Theil dieser Arbeit seine Grundlage verdankt.

Ungeachtet die mühsame und schwierige Correctur sorgfältigen Händen anvertraut war, so haben sich dennoch bei der letzten Durchsicht einige unbeträchtliche Druckfehler und Irrungen vorgefunden, von denen es wünschenswerth ist, dafs sie vor dem Gebrauche abgeändert werden. Dafs sich auch später noch ähnliche Fehler, vielleicht sogar in den Rechnungen, finden sollten, kann nicht aufser Möglichkeit gestellt werden; sie scheinen von einem ersten Versuche unzertrennlich, obgleich eben hier nicht geringe Mühe angewendet worden ist, sich ihrer zu entledigen.

Berlin, im April 1827.

J. v. Radowitz,
Hauptmann im Königl. General-Staabe.

Uebersicht des Inhalts.

Erste Abtheilung.

Formeln zur ebenen und körperlichen Geometrie.

Erster Abschnitt.

Formeln zur ebenen Geometrie.

Zweiter Abschnitt.

Formeln zur körperlichen Geometrie.

Zweite Abtheilung.

Formeln zur Trigonometrie und Goniometrie.

Erster Abschnitt.

Formeln zur Auflösung der ebenen und sphärischen Dreiecke.

Zweiter Abschnitt.

Formeln zur trigonometrischen Analysis.

Seite

Erste Abtheilung.

Formeln zur ebenen und körperlichen Geometrie.

Erster Abschnitt.

Formeln zur ebenen Geometrie.

I. Das Quadrat.

Es sei der Flächeninhalt des Quadrats $= F$
dessen Seite $= a$
die Diagonallinie $= b$

Gegeben:	Gesucht:
1. a;	$F = a^2$
2. b;	$F = \frac{b^2}{2}$
3. F;	$a = \sqrt{F}$
4. b;	$a = \frac{b\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068 . b$
	$\log a = 0{,}8494850 - 1 + \log b$
5. F;	$b = \sqrt{2F} = 1{,}4142136 . \sqrt{F}$
	$\log b = 0{,}1505150 + \frac{1}{2} \log F$
6. a;	$b = a\sqrt{2} = 1{,}4142136 . a$
	$\log b = 0{,}1505150 + \log a$

II. Der Rectangel.

Es sei der Flächeninhalt des Rectangels $= F$
zwei auf einander perpendiculare Seiten $= a$ und b
die Diagonallinie $= c$
der Winkel der Diagonale mit der Seite a $= \varphi$

Gegeben:		Gesucht:
1.	a, b;	$F = a.b$
2.	a, c;	$F = a\sqrt{(c^2-a^2)} = a\sqrt{((c+a).(c-a))}$
3.	a, φ;	$F = a^2.tang\,\varphi$
4.	b, c;	$F = b\sqrt{(c^2-b^2)} = b\sqrt{((c+b).(c-b))}$
5.	b, φ;	$F = b^2.cot\,\varphi$
6.	c, φ;	$F = \frac{1}{2}c^2.sin\,2\varphi$
7.	F, b;	$a = \frac{F}{b}$
8.	F, c;	$a = \sqrt{\left(\frac{c^2+\sqrt{(c^4-4F^2)}}{2}\right)} = \frac{1}{2}[\sqrt{(c^2+2F)}+\sqrt{(c^2-2F)}]$
9.	F, φ;	$a = \sqrt{F.cot\,\varphi}$
10.	b, c;	$a = \sqrt{(c^2-b^2)} = \sqrt{((c+b).(c-b))}$
11.	b, φ;	$a = b.cot\,\varphi$
12.	c, φ;	$a = c.cos\,\varphi$
13.	F, a;	$b = \frac{F}{a}$
14.	F, c;	$b = \sqrt{\left(\frac{c^2+\sqrt{(c^4-4F^2)}}{2}\right)} = \frac{1}{2}[\sqrt{(c^2+2F)}-\sqrt{(c^2-2F)}]$
15.	F, φ;	$b = \sqrt{F.tang\,\varphi}$
16.	a, c;	$b = \sqrt{(c^2-a^2)} = \sqrt{((c+a).(c-a))}$
17.	a, φ;	$b = a.tang\,\varphi$
18.	c, φ;	$b = c.sin\,\varphi$
19.	F, a;	$c = \sqrt{\left(\frac{F^2}{a^2}+a^2\right)} = \frac{\sqrt{(F^2+a^4)}}{a}$
20.	F, b;	$c = \sqrt{\left(\frac{F^2}{b^2}+b^2\right)} = \frac{\sqrt{(F^2+b^4)}}{b}$
21.	F, φ;	$c = \sqrt{\left(\frac{F}{cos\,\varphi.sin\,\varphi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2F}{sin\,2\varphi}\right)} = \sqrt{F(tang\,\varphi+cot\,\varphi)}$
22.	a, b;	$c = \sqrt{(a^2+b^2)}$
23.	a, φ;	$c = \sqrt{(a^2+a^2\,tang^2\,\varphi)} = a.sec\,\varphi = \frac{a}{cos\,\varphi}$

24. b, φ; $c = \sqrt{\left(\frac{b^2}{tang^2\varphi} + b^2\right)} = b\,cosec\,\varphi = \frac{b}{sin\,\varphi}$

Anmerkung. Es ist augenscheinlich, daſs in obigen Formeln sowohl, als in sämmtlichen zur ebenen, körperlichen und höheren Geometrie gehörigen, die Winkel und ihre Functionen nur als Hülfsmittel zur Bestimmung der Linien und Flächen angewendet, nicht aber überall als zu suchende Gröſsen betrachtet worden sind. Die Formeln der Trigonometrie geben, da wo es auf Bestimmung der Winkel selbst ankommt, die nöthige Ergänzung.

III. Das Parallelogramm überhaupt.

Es sei der Flächeninhalt des Parallelogramms $= F$
die zwei Seiten desselben $= a$ und b
der Winkel, den diese einschlieſsen $= \varphi$
der Perpendikel auf die Seite a $= h$
die beiden Diagonallinien $= c$ und d
der Winkel, den diese einschlieſsen $= \alpha$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, h;	$F = a.h$
2. a, b, φ;	$F = ab\,sin\,\varphi$
3. c, d, α;	$F = \frac{1}{2}cd\,sin\,\alpha$
4. a, b, c;	$F = \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2b^2 - a^4 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4)}$
5. a, b, d;	$F = \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2b^2 - a^4 + 2a^2d^2 - b^4 + 2b^2d^2 - d^4)}$
6. a, c, d;	$F = \frac{1}{4}\sqrt{(8a^2d^2 - 16a^4 + 8a^2c^2 - d^4 + 2c^2d^2 - c^4)}$
7. b, c, d;	$F = \frac{1}{4}\sqrt{(8b^2d^2 - 16b^4 + 8b^2c^2 - d^4 + 2c^2d^2 - c^4)}$
8. F, h;	$a = \frac{F}{h}$
9. F, b, φ;	$a = \frac{F}{b\,sin\,\varphi} = \frac{F}{b}.cosec\,\varphi$
10. F, h;	$b = \frac{F\,cos\varphi}{h}$
11. F, a, φ;	$b = \frac{F}{a\,sin\varphi} = \frac{F}{a}.cosec\varphi$
12. F, d, α;	$c = \frac{2F}{d\,sin\,\alpha} = \frac{2F}{d}\,cosec\,\alpha$

13. a, b, φ; $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)}$

14. F, c, α; $d = \frac{2F}{c\sin\alpha} = \frac{2F}{c}.\operatorname{cosec}\alpha$

15. a, b, φ; $d = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi)}$

16. F, a; $h = \frac{F}{a}$

17. F, b, φ; $h = \frac{F}{b\cos\varphi} = \frac{F}{b}.\sec\varphi$

IV. Das Dreieck.

A) Das ungleichseitige Dreieck überhaupt.

Es sei der Flächeninhalt eines ungleichseitigen Dreiecks $= F$
seine drei Seiten $= a, b, c$
deren Summe $= S$
der Perpendikel auf die Seite a $= h$
die drei Winkel $= \alpha, \beta, \gamma$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, h;	$F = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}a.h = a.\frac{1}{2}h$
2. a, b, c;	$F = \frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b))}$
3.	$= \frac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$
4.	$= \frac{1}{4}\sqrt{(S.(S-2a).(S-2b).(S-2c))}$
5. b, c, α;	$F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$
6. a, α, β;	$F = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$
7. a, b, α;	$F = \frac{1}{2}b\sin\alpha\left(\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\cos\alpha)\right)$
8. a, β, γ;	$F = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot\beta + \cot\gamma}$
9. h, β, γ;	$F = \frac{1}{2}h^2\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{1}{2}h^2(\cot\beta + \cot\gamma)$
10. F, h;	$a = \frac{2F}{h}$

11. F, b, c; $a = \sqrt{(b^2 + c^2 \mp \sqrt{(4b^2c^2 - 16F^2)})}$

12. F, α, β; $a = \sqrt{\left(\frac{2F \sin\alpha}{\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}\right)}$

13. F, β, γ; $a = \sqrt{\left(\frac{2F \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}\right)} = \sqrt{(2F(\cot\beta + \cot\gamma))}$

14. F, a; $h = \frac{2F}{a}$

15. a, b, c; $h = \frac{1}{2a}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

$= \frac{1}{2a}\sqrt{(S.(S-2a).(S-2b).(S-2c))}$

16. b, c, α; $h = \frac{bc \sin\alpha}{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)}}$

17. a, α, β; $h = \frac{a.\sin\beta.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

18. a, β, γ; $h = \frac{a.\sin\beta.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{a}{\cot\beta + \cot\gamma}$

Anmerkung. In sämmtlichen Formeln für das Dreieck ist die Bezeichnung der Winkel so gewählt, dafs sich die gleichnamigen Buchstaben correspondiren; d. h. der Winkel α liegt der Seite a, β liegt b, γ liegt c gegenüber.

Zusatz.

Formeln für Dreiecke, in welchen Summen oder Differenzen der Seiten gegeben sind.

Wenn in einem Dreiecke, statt der einzelnen Seiten, die Summe derselben, oder die Summe oder Differenz von zweien, nebst der dritten, gegeben sind, so kann daraus mit Hülfe der drei Winkel, sowohl die Gröfse der einzelnen Seiten, als auch der Flächeninhalt berechnet werden.

Es seien, wie vorher, die drei Seiten = a, b und c
die drei Winkel, so wie sie den gleichnamigen Seiten gegenüber stehen = α, β und γ
der Flächeninhalt = F
der gesammte Umfang = S
so entstehen bei den verschiedenen Voraussetzungen folgende Formeln:

Gegeben:	Gesucht:

Gegeben: $a \mp b = m,\ \beta,\ \gamma;$

1. $$a = \frac{m \sin\alpha}{\sin\alpha \mp \sin\beta} = \frac{m \sin\alpha}{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)}$$

2. $$b = \frac{m \sin\beta}{\sin\alpha \mp \sin\beta} = \frac{m \sin\beta}{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)}$$

3. $$c = \frac{m \sin\gamma}{\sin\alpha \mp \sin\beta} = \frac{m \sin\gamma}{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)}$$

4. $$F = \frac{m^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2(\sin\alpha \mp \sin\beta)^2} = \frac{m^2 \sin\alpha \sin\beta \,tang\frac{1}{2}\gamma}{4 \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2} = \frac{m^2 \sin\alpha \sin\beta \cot\frac{1}{2}\gamma}{4 \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2}$$

Gegeben: $a + b + c = S,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma;$

5. $$a = \frac{S \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{S \sin\frac{1}{2}\alpha}{2 \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}$$

6. $$b = \frac{S \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{S \sin\frac{1}{2}\beta}{2 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\gamma}$$

7. $$c = \frac{S \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{S \sin\frac{1}{2}\gamma}{2 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta}$$

8. $$F = \frac{S^2 \,tang\frac{1}{2}\alpha \,tang\frac{1}{2}\beta \,tang\frac{1}{2}\gamma}{4}$$

Gegeben: $a + b = m,\ c,\ \gamma;$

9. $$a = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(m^2 - \frac{m^2 - c^2}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

10. $$b = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(m^2 - \frac{m^2 - c^2}{\cos^2\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

11. $$F = \frac{1}{4}(m^2 - c^2)\,tang\frac{1}{2}\gamma$$

Gegeben: $a - b = d,\ c,\ \gamma;$

12. $$a = \frac{d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(d^2 + \frac{d^2 - c^2}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

13. $$b = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(d^2 + \frac{d^2 - c^2}{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}\right)}$$

14. $$F = \frac{1}{4}(c^2 - d^2)\cot\frac{1}{2}\gamma$$

Gegeben: $a \mp b = m,\ c,\ \alpha;$

15. $$a = \frac{c^2 + m^2 \pm 2cm\cos\alpha}{2(m \pm c\cos\alpha)}$$

16. $$b = \frac{\mp m^2 \pm c^2}{2(m \pm c\cos\alpha)}$$

17. $$F = \frac{c(\pm m^2 \pm c^2)\sin\alpha}{4(m \pm c\cos\alpha)}$$

18.–20. Gegeben: $a-b=d$, c, β;

$$a=\frac{c^2-d^2}{2(c\cos\beta-d)}$$

$$b=\frac{c^2+d^2-2cd\cos\beta}{2(c\cos\beta-d)}$$

$$F=\frac{c(c^2-d^2)\sin\beta}{4(c\cos\beta-d)}$$

21.–23. Gegeben: $a+b=m$, $a+c=n$, α;

$$a=\frac{(m+n)(1-\cos\alpha)}{1-2\cos\alpha}+\sqrt{\frac{(m-n)^2\cos^2\alpha+2mn(1-\cos\alpha)}{(1-2\cos\alpha)^2}}$$

$$b=m-\frac{(m+n)(1-\cos\alpha)+\sqrt{(m-n)^2\cos^2\alpha+2mn(1-\cos\alpha)}}{1-2\cos\alpha}$$

$$c=n-\frac{(m+n)(1-\cos\alpha)+\sqrt{(m-n)^2\cos^2\alpha+2mn(1-\cos\alpha)}}{1-2\cos\alpha}$$

Anmerkung. Eine beträchtlichere Anzahl ähnlicher Formeln, die aus gegebenen Summen und Differenzen der Seiten oder Winkel eines Dreiecks hervorgegangen sind, enthalten: Strehlke Aufgaben über das geradlinigte Dreieck 1826; und Kroll, Aufgaben über Dreiecke, worin Summen oder Differenzen von Winkeln oder Seiten gegeben sind, 1826.

B) Das gleichschenkliche Dreieck.

Es sei der Flächeninhalt eines gleichschenklichen Dreiecks $= F$
die Grundlinie desselben $= a$
jeder der beiden Schenkel $= b$
der Perpendikel auf die Grundlinie $= h$
die Winkel des Dreiecks $= \alpha$ und β

Gegeben:	Gesucht:
1. a, h;	$F=\frac{1}{2}ah$
2. a, b;	$F=\frac{1}{4}a\sqrt{(4b^2-a^2)}=\frac{1}{4}a\sqrt{((2b+a).(2b-a))}$
3. b, h;	$F=h\sqrt{(b^2-h^2)}$
4. a, α;	$F=\frac{1}{4}a^2\cot\frac{1}{2}\alpha$
5. a, β;	$F=\frac{1}{4}a^2\tang\beta$
6. b, α;	$F=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha$
7. b, β;	$F=\frac{1}{2}b^2\sin 2\beta$
8. F, h;	$a=\frac{2F}{h}$
9. F, b;	$a=\sqrt{(2b^2\mp\sqrt{(4b^4-16F^2)})}=\sqrt{(b^2+2F)}+\sqrt{(b^2-2F)}$

10. b, h; $a = 2\sqrt{(b^2 - h^2)}$
11. b, α; $a = 2b \sin \frac{1}{2}\alpha$
12. b, β; $a = 2b \cos \beta$
13. h, α; $a = 2h \tang \frac{1}{2}\alpha$
14. h, β; $a = 2h \tang \beta$

15. F, a; $b = \frac{\sqrt{(16F^2 + a^4)}}{2a}$
16. F, h; $b = \frac{\sqrt{(F^2 + h^4)}}{h}$
17. a, α; $b = \frac{a}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\alpha$
18. a, β; $b = \frac{a}{2 \cos \beta} = \frac{1}{2} a \sec \beta$
19. a, h; $b = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + h^2)}$
20. h, α; $b = \frac{h}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = h \sec \frac{1}{2}\alpha$
21. h, β; $b = \frac{h}{\sin \beta} = h \operatorname{cosec} \beta$

22. F, a; $h = \frac{2F}{a}$
23. F, b; $h = \frac{F}{\sqrt{(b^2 - h^2)}}$
24. a, b; $h = \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4} a^2)}$
25. a, α; $h = \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2}\alpha$
26. a, β; $h = \frac{1}{2} a \cot \beta$
27. b, α; $h = b \cos \frac{1}{2}\alpha$
28. b, β; $h = b \sin \beta$

C) Das gleichseitige Dreieck.

Es sei der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks $= F$
dessen Seite $= a$
der Perpendikel des Dreiecks $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. a;	$F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 0{,}4330127 . a^2$
	$\log F = 0{,}6365006 - 1 + 2 \log a$
2. h;	$F = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = 0{,}5773503 . h^2$
	$\log F = 0{,}7614394 - 1 + 2 \log h$
3. F;	$a = \sqrt{\frac{4F}{\sqrt{3}}} = 1{,}5196714 . \sqrt{F}$
	$\log a = 0{,}1817497 + \frac{1}{2} \log F$
4. h;	$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = 1{,}1547005 . h$
	$\log a = 0{,}0624693 + \log h$
5. F;	$h = \sqrt[4]{3 . F^2} = \sqrt{F . \sqrt{3}} = 1{,}3160741 . \sqrt{F}$
	$\log h = 0{,}1192803 + \frac{1}{2} \log F$
6. a;	$h = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = 0{,}8660254 . a$
	$\log h = 0{,}9375306 - 1 + \log a$

D) Das rechtwinkliche Dreieck.

Es sei der Flächeninhalt eines rechtwinklichen Dreiecks $= F$
seine Hypothenuse $= a$
die beiden Katheten $= b$ und c
der gesammte Umfang $= p$
die beiden spitzen Winkel $= \beta$ und γ
der Perpendikel auf die Hypothenuse $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, h;	$F = \frac{1}{2} a h$
2. a, b;	$F = \frac{1}{2} b \sqrt{(a^2 - b^2)}$
3. b, c;	$F = \frac{1}{2} b c$
4. b, h;	$F = \frac{1}{2} \frac{b^2 h}{\sqrt{(b^2 - h^2)}}$
5. a, β;	$F = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\beta$
6. b, γ;	$F = \frac{1}{2} b^2 \tang \gamma$
7. b, β;	$F = \frac{1}{2} b^2 \cot \beta$

8. F, h; $a = \frac{2F}{h}$

9. F, b; $a = \frac{\sqrt{(4F^2 + b^4)}}{b}$

10. F, p; $a = \frac{4F - p^2}{2p}$

11. b, c; $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$

12. b, h; $a = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 - h^2)}}$

13. b, β; $a = \frac{b}{\sin\beta} = b \operatorname{cosec}\beta$

14. b, γ; $a = \frac{b}{\cos\gamma} = b \sec\gamma$

15. F, a; $b = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + F)} \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - F)}$

16. F, h; $b = \frac{\sqrt{(F^2 + Fh^2)} \mp \sqrt{(F^2 - Fh^2)}}{h}$

17. F, p; $b = \frac{4F + p^2 \mp \sqrt{(16F^2 - 24Fp^2 + p^4)}}{4p}$

18. a, c; $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$

19. a, h; $b = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ah)} \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ah)}$

20. a, β; $b = a \sin\beta$

21. a, γ; $b = a \cos\gamma$

22. F, a; $h = \frac{2F}{a}$

23. F, b; $h = \frac{2bF}{\sqrt{(4F^2 + b^4)}}$

24. F, p; $h = \frac{4Fp}{4F - p^2}$

25. a, b; $h = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)}$

26. a, b, c; $h = \frac{bc}{a}$

27. b, c; $h = \frac{bc}{\sqrt{(b^2 + c^2)}}$

28. a, β; $h = \frac{1}{2} a \sin 2\beta$
29. b, β; $h = b \cos\beta$
30. b, γ; $h = b \sin\gamma$

Anmerkung. Sämmtliche Formeln von 15—19 dienen begreiflicherweise gleichermaſsen zur Bestimmung der Kathete c. Ebenso kann in den Formeln 2. 4. 9. 12. 23. 25. unmittelbar c statt b substituirt werden, sobald ersteres als gegeben angesehen wird. In den Formeln 6. 7. 14. 20. 21. 29. und 30. hingegen, ist diese Substitution erst zulässig, wenn zuvor, statt der bezeichneten Winkel, die entgegengesetzten, in die Formel eingeführt worden sind.

Zusatz 1.

Wenn in einem rechtwinklichen Dreiecke, auſser einer Seite, noch die Summe oder Differenz der beiden anderen bekannt ist, so werden diese Seiten durch folgende Formeln ausgedrückt:

a) Gegeben: die Hypothenuse $=$ a, und die Summe der beiden Katheten $=$ S, so ist:

$$b = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$$
$$c = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$$

b) Gegeben: die Hypothenuse $=$ a, und die Differenz der beiden Katheten $=$ d, so ist:

$$b = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}d^2)} + \tfrac{1}{2}d$$
$$c = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d$$

c) Gegeben: eine Kathete $=$ b, und die Summe der Hypothenuse und der andern Kathete $=$ S, so ist:

$$a = \frac{S^2 + b^2}{2S} = \tfrac{1}{2}\left(S + \frac{b^2}{S}\right)$$
$$c = \frac{S^2 - b^2}{2S} = \tfrac{1}{2}\left(S - \frac{b^2}{S}\right)$$

d) Gegeben: eine Kathete $=$ b, nebst der Differenz zwischen der Hypothenuse und der anderen Kathete $=$ d, so ist:

$$a = \frac{b^2 + d^2}{2d}$$
$$c = \frac{b^2 - d^2}{2d}$$

e) Gegeben: die Hypothenuse $=$ a, und das Verhältniſs der beiden Katheten zu einander $=$ m : n, so ist:

$$b = \frac{am}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$$

$$c = \frac{an}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$$

Zusatz 2.

Wenn das rechtwinkliche Dreieck zugleich gleichschenklich ist, so wird $b = c$ und $\beta = \gamma$; woraus sich folgende Ausdrücke ergeben:

Gegeben:	Gesucht:
1. a;	$F = \frac{1}{4}a^2$
2. b;	$F = \frac{1}{2}b^2$
3. h;	$F = h^2$
4. p;	$F = \frac{p^2}{12+8\sqrt{2}} = 0{,}0428932 \cdot p^2$ $\log F = 0{,}6323884 - 2 + 2 \log p$
5. F;	$a = 2\sqrt{F}$
6. b;	$a = b\sqrt{2} = 1{,}4142136 \cdot b$ $\log a = 0{,}1505150 + \log b$
7. h;	$a = 2h$
8. p;	$a = \frac{p}{1+\sqrt{2}} = 0{,}4142136 \cdot p$ $\log a = 0{,}6172244 - 1 + \log p$
9. F;	$b = \sqrt{2F} = 1{,}4142136 \cdot \sqrt{F}$ $\log b = 0{,}1505150 + \frac{1}{2} \log F$
10. a;	$b = a\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071068 \cdot a$ $\log b = 0{,}8494850 - 1 + \log a$
11. h;	$b = h\sqrt{2} = 1{,}4142136 \cdot h$ $\log b = 0{,}1505150 + \log h$
12. p;	$b = \frac{p}{2+\sqrt{2}} = 0{,}2928932 \cdot p$ $\log b = 0{,}4667093 - 1 + \log p$
13. F;	$h = \sqrt{F}$
14. a;	$h = \frac{1}{2}a$

15. b; $h = \frac{1}{2} b \sqrt{2} = 0{,}7071068 . b$
$\log h = 0{,}8494850 - 1 + \log b$

16. p; $h = \frac{p}{2 + 2\sqrt{2}} = 0{,}2071068 . p$
$\log h = 0{,}3161944 - 1 + \log p$

17. F; $p = (2 + 2\sqrt{2}) . \sqrt{F} = 4{,}8284271 . \sqrt{F}$
$\log p = 0{,}6838056 + \frac{1}{2} \log F$

18. a; $p = a(1 + \sqrt{2}) = 2{,}4142136 . a$
$\log p = 0{,}3827757 + \log a$

19. b; $p = b(2 + \sqrt{2}) = 3{,}4142136 . b$
$\log p = 0{,}5332907 + \log b$

20. h; $p = 2h(1 + \sqrt{2}) = 4{,}8284271 . h$
$\log p = 0{,}6838056 + \log h$

V. Das Trapez.

A) Mit zwei parallelen Seiten.

Es sei der Flächeninhalt eines Trapezes $= F$
seine beiden parallelen Seiten $= a$ und b
seine beiden nicht parallelen Seiten $= c$ und d
der Perpendikel zwischen den Parallelen $= h$
die beiden Winkel des Trapezes, die auf der Linie a oder b liegen $= \alpha$ und β
die beiden Diagonallinien $= f$ und g
der von ihnen eingeschlossene Winkel $= \varphi$

Gegeben: Gesucht:

1. a, b, h; $F = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{1}{2} h . (a+b) = h . \frac{1}{2}(a+b)$

2. a, b, c, d; $F = \frac{1}{4} . \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(c+d+b-a)(c+d+a-b)(c+b-a-d)(d+b-a-c)}$

3. a, b, c, α; $F = \frac{1}{2} c \sin\alpha \, (a+b)$

4. a, b, α, β; $F = (a^2 - b^2) . \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = (a^2 - b^2) . \frac{1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

5. a, c, d, α; $F = \frac{1}{2} c \cos\alpha \, (2a - c \cos\alpha \mp \sqrt{(d^2 - c^2 \sin^2\alpha)})$

6. a, c, d, h; $F = \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 - h^2)} . [2a \mp \sqrt{(c^2 - h^2)} \mp \sqrt{(d^2 - h^2)}]$

7. a, h, α, β; $F = ah - h^2 . \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta} = ah - \frac{1}{2} h^2 . (\cot\alpha + \cot\beta)$

8. f, g, φ; $F = \frac{1}{2} fg \sin\varphi$

9. F, b, h; $a = \frac{2F - bh}{h}$

10. F, b, c, α; $a = \frac{2F}{c \sin\alpha} - b$

11. F, b, α, β; $a = \sqrt{\left(F . \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha . \sin\beta} - b^2\right)} = \sqrt{(F . (\cot\alpha + \cot\beta) - b^2)}$

12. F, h, α, β; $a = \frac{2(F + h^2) \sin\alpha \sin\beta}{h}$

13. F, c, d, α; $a = \frac{F}{c \cos\alpha} + \frac{1}{2} c \cos\alpha \mp \sqrt{(d^2 - c^2 \sin^2\alpha)}$

14. F, c, d, h; $a = \frac{F}{\sqrt{(c^2 - h^2)}} \mp \sqrt{(c^2 - h^2)} \mp \sqrt{(d^2 - h^2)}$

15. b, c, d, α; $a = b \mp c \cos\alpha \mp \sqrt{(d^2 - c^2 \sin^2\alpha)}$

16. b, c, α, β; $a = \frac{b \sin\beta + c(\sin\alpha + \beta)}{\sin\beta}$

17. b, c, d, h; $a = b \mp \sqrt{(d^2 - h^2)} \mp \sqrt{(c^2 - h^2)}$

18. F, a, b, α; $c = \frac{2F}{(a + b) \sin\alpha} = \frac{2F}{a + b} . \operatorname{cosec}\alpha$

19. a, b, d, α; $c = \sqrt{[d^2 - (a - b)^2 \sin^2\alpha]} + (a - b) \cos\alpha$

20. a, b, d, h; $c = \sqrt{[d^2 + (a - b)^2 - 2(a - b)\sqrt{(d^2 - h^2)}]}$

21. c, α; $h = c \sin\alpha$

22. d, β; $h = d \sin\beta$

23. F, a, b; $h = \frac{2F}{a + b}$

24. F, a, α, β; $h = \frac{\sqrt{[\sin^2\alpha \sin^2\beta . a^2 - \sin(\alpha + \beta) . F]} + \sin\alpha \sin\beta . a}{\sin(\alpha + \beta)}$

25. a, b, c, d; $h = \sqrt{\left[c^2 - \left(\frac{c^2 + (a - b)^2 - d^2}{2(a - b)}\right)^2\right]}$

Anmerkung. Die Formeln 9—17 dienen gleichermaſsen, zur Bestimmung der andern parallelen

Seite b, weshalb die Wurzelausdrücke mit beiden Zeichen versehen sind. Dasselbe gilt von den Ausdrücken 18 — 20, durch welche ebensowohl d als c gefunden werden kann.

B) Mit nicht parallelen Seiten.

Es sei der Flächeninhalt eines Trapezoids $= F$
seine vier Seiten nach der Reihefolge $= a, b, c$ und d
seine vier Winkel gleichfalls nach der Reihefolge $= \alpha, \beta, \gamma$ und δ
die beiden Diagonallinien $= f$ und g
der von ihnen eingeschlossene Winkel $= \varphi$

Gegeben: Gesucht:

1. a, b, c, α, β; $F = \frac{1}{2}(ab\, sin\,\alpha + bc\, sin\,\beta - ac\, sin(\alpha+\beta))$
2. a, c, d, α, δ; $F = \frac{1}{2}(ad\, sin\,\delta + cd\, sin\,\gamma - ac\, sin\,\delta+\gamma)$
3. $a, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $F = \frac{a^2\, sin\,\alpha\, sin\,\delta - c^2\, sin\,\gamma\, sin\,\beta}{2\, sin(\alpha+\delta)}$
4. $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $F =$
$$= \frac{b^2\, sin\,\alpha\, sin\,\beta\, sin\,\gamma - b^2\, sin^2\beta\, sin\,\delta + 2ab\, sin(\alpha+\beta)\, sin\,\beta\, sin\,\delta - a^2\, sin^2(\alpha+\beta)\, sin\,\delta}{2\, sin(\alpha+\beta)\, sin\,\gamma}$$
5. $a, b, c, d, \alpha, \gamma$; $F = \frac{1}{2}ab\, sin\,\alpha + \frac{1}{2}cd\, sin\,\gamma$
6. f, g, φ; $F = \frac{1}{2}fg\, sin\,\varphi$

7. $b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$; $a = b\, cos\,\alpha - c\, cos(\alpha+\beta) + d\, cos(\alpha+\beta+\gamma)$
8. b, c, d, β, γ; $a = \sqrt{(b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\, cos\,\beta + 2bd\, cos(\beta+\gamma) + 2cd\, cos\,\gamma)}$
9. $F, b, c, d, \alpha, \gamma$; $a = \frac{2F - cd\, sin\,\gamma}{b\, sin\,\alpha}$
10. F, b, c, α, β; $a = \frac{2F - bc\, sin\,\beta}{(b-c) . sin(\alpha+\beta)}$
11. $F, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $a = \sqrt{\left(\frac{2F . sin(\alpha+\delta) + c^2 . sin\,\beta\, sin\,\gamma}{sin\,\alpha . sin\,\delta}\right)}$
12. $F, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$; $a = \sqrt{\left(\frac{2F . sin(\alpha+\beta) sin\,\gamma + b^2 . (2 sin^2\beta\, sin\,\delta - sin\,\alpha\, sin\,\gamma)}{sin^2(\alpha+\beta)\, sin\,\delta}\right)} - \frac{b\, sin\,\beta}{sin(\alpha+\beta)}$

13. F, g, φ; $f = \frac{2F}{g\, sin\,\varphi}$
14. a, b, α; $f = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\, cos\,\alpha)}$

Anmerkung. Die Bezeichnung der Seiten und Winkel ist so angenommen, daſs der Winkel α eingeschlossen wird von a und b

— — β — — — — b und c

— — γ — — — — c und d

— — δ — — — — d und a

Zusatz.

Wenn die Winkel einer vierseitigen Figur durch besondere Bedingungen näher bestimmt sind, so kann der Flächeninhalt durch einfachere Ausdrücke dargestellt werden. Von dieser Art sind folgende Formeln.

a) Wenn in einem Vierecke die gegenüberliegenden Winkel zusammen 180° betragen, welches bei jeder in einem Kreise beschriebenen vierseitigen Figur Statt findet, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)]}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{[(S-2a)(S-2b)(S-2c)(S-2d)]}$$

b) Wenn in einer vierseitigen Figur zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\frac{ad+bc}{ad-bc}\cdot\sqrt{[(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+d-b-c)(b+d-a-c)]}$$

Anmerkung. Die 4 Seiten sind hier so bezeichnet, daſs die gleichen Winkel durch a und b, so wie durch c und d, eingeschlossen sind.

c) Wenn in dem Vierecke ein Winkel ein Rechter ist, so wird:

$$F = \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{4}.\sqrt{(b+c+\sqrt{(a^2+d^2)})(b+c-\sqrt{(a^2+d^2)}).(b-c+\sqrt{(a^2+d^2)}).}$$
$$\overline{.(c-b+\sqrt{(a^2+d^2)})}$$

Anmerkung. Die Seiten a und d werden als diejenigen angenommen, die den rechten Winkel einschlieſsen.

VI. Das reguläre Polygon.

A) Reguläre Polygone überhaupt.

Es sei der Flächeninhalt eines regulären Polygons von n Seiten $= F$

die Seite desselben $= a$

der Radius des umschriebenen Kreises $= r$

das Apothema $= p$

der Mittelpunktswinkel $= \alpha$

der Polygonwinkel $= \varphi$

der Winkel des Radius mit der Seite (halbe Polygonwinkel) $= \beta$

	Gegeben:	Gesucht:
1.		$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$
2.		$\varphi = \frac{180^\circ (n-2)}{n}$
3.		$\beta = \frac{90^\circ (n-2)}{n}$
4.	φ;	$\alpha = 180^\circ - \varphi$
5.	β;	$\alpha = 90^\circ - \beta$
6.	α;	$\varphi = 180^\circ - \alpha$
7.	α;	$\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$
8.	α;	$n = \frac{360^\circ}{\alpha}$
9.	φ;	$n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \varphi}$
10.	β;	$n = \frac{180^\circ}{90^\circ - \beta}$
11.	a, α;	$F = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{1}{2}\alpha . n$
12.	a, β;	$F = \frac{1}{4} a^2 \tang \beta . n$
13.	r, α;	$F = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha . n$
14.	r, β;	$F = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta . n$
15.	p, α;	$F = p^2 \tang \frac{1}{2}\alpha . n$
16.	p, β;	$F = p^2 \cot \beta . n$
17.	a, r;	$F = \frac{1}{2} a \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)} . n$
18.	a, p;	$F = \frac{1}{2} a p . n$
19.	r, p;	$F = p \sqrt{(r^2 - p^2)} . n$
20.	F, α;	$a = 2\sqrt{\left(\frac{F \tang \frac{1}{2}\alpha}{n}\right)}$
21.	F, β;	$a = 2\sqrt{\left(\frac{F \cot \beta}{n}\right)}$
22.	r, α;	$a = 2 r \sin \frac{1}{2}\alpha$
23.	r, β;	$a = 2 r \cos \beta$
24.	p, α;	$a = 2 p \tang \frac{1}{2}\alpha$
25.	p, β;	$a = 2 p \cot \beta$

26. F, r; $a = \sqrt{\left[2r^2 \mp \sqrt{\left(4r^4 - \frac{16F^2}{n^2}\right)}\right]}$

$= \sqrt{\left(r^2 + \frac{2F}{n}\right)} \mp \sqrt{\left(r^2 - \frac{2F}{n}\right)}$

27. F, p; $a = \frac{2F}{p.n}$

28. r, p; $a = 2\sqrt{(r^2 - p^2)}$

29. F, α; $r = \sqrt{\frac{2F}{\sin\alpha . n}} = \sqrt{\frac{2F}{n}\,\mathrm{cosec}\,\alpha}$

30. F, β; $r = \sqrt{\frac{2F}{\sin 2\beta . n}} = \sqrt{\frac{2F}{n}\,\mathrm{cosec}\,2\beta}$

31. a, α; $r = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}a\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}\alpha$

32. a, β; $r = \frac{a}{2\cos\beta} = \frac{1}{2}a\sec\beta$

33. p, α; $r = \frac{p}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = p\sec\frac{1}{2}\alpha$

34. p, β; $r = \frac{p}{\sin\beta} = p\,\mathrm{cosec}\,\beta$

35. F, a; $r = \frac{\sqrt{(a^4 . n^2 + 16F^2)}}{2an}$

36. F, p; $r = \frac{\sqrt{(p^4 n^2 + F^2)}}{pn}$

37. a, p; $r = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + p^2)}$

38. F, α; $p = \sqrt{\left(\frac{F . \cot\frac{1}{2}\alpha}{n}\right)}$

39. F, β; $p = \sqrt{\left(\frac{F\,\mathrm{tang}\,\beta}{n}\right)}$

40. a, α; $p = \frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}\alpha$

41. a, β; $p = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\,\beta$

42. r, α; $p = r\cos\frac{1}{2}\alpha$

43. r, β; $p = r\sin\beta$

44. F, a; $p = \frac{2F}{a.n}$

45. F, r; $p = \sqrt{\left[\frac{r^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r^4}{4} - \frac{F^2}{n^2}\right)}\right]}$

$= \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{F}{2n}\right)} \mp \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} - \frac{F}{2n}\right)}$

46. a, r; $p = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

Anmerkung. Da das Apothema p zugleich den Radius eines in dem Polygon beschriebenen Kreises ausdrücken kann, so sind alle dieses p enthaltende Formeln zugleich auf den eingeschriebenen Radius anwendbar.

B) Verdoppelung der Polygone.

Es sei der Flächeninhalt eines regulären Polygons von 2n Seiten $= F_{\prime}$
dessen Seite $= a_{\prime}$
dessen Apothema $= p_{\prime}$
der zugehörige Mittelpunktswinkel $= \alpha_{\prime}$
der Polygonwinkel $= \varphi_{\prime}$
der Winkel des Radius mit der Seite (halbe Polygonwinkel) $= \beta_{\prime}$

Alle auf das Polygon von n Seiten sich beziehenden Buchstaben behalten ihre Bedeutung wie vorher.

a) Die Theile des Polygons von 2n Seiten werden aus denen des Polygons von n Seiten gesucht.

Gegeben:	Gesucht:
1. α;	$\alpha_{\prime} = \frac{1}{2}\alpha$
2. φ;	$\alpha_{\prime} = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\varphi$
3. β;	$\alpha_{\prime} = 90^{\circ} - \beta$
4. α;	$\varphi_{\prime} = 180^{\circ} - \frac{1}{2}\alpha$
5. φ;	$\varphi_{\prime} = 90^{\circ} + \frac{1}{2}\varphi$
6. β;	$\varphi_{\prime} = 90^{\circ} + \beta$
7. α;	$\beta_{\prime} = 90^{\circ} - \frac{1}{4}\alpha$
8. φ;	$\beta_{\prime} = 45^{\circ} + \frac{1}{4}\varphi$
9. β;	$\beta_{\prime} = 45^{\circ} + \frac{1}{2}\beta$
10. a, r;	$F_{\prime} = \frac{1}{4} ar \cdot 2n$
11. a, p;	$F_{\prime} = \frac{1}{4} a \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + p^2)} \cdot 2n$
12. r, p;	$F_{\prime} = \frac{1}{2} r \sqrt{(r^2 - p^2)} \cdot 2n$

13. F, a; $F_{,} = \frac{1}{4}\sqrt{(a^4 n^2 + 16 F^2)}$

14. F, r; $F_{,} = \frac{1}{2} r \sqrt{(2 r^2 n^2 \mp n \sqrt{(4 r^4 n^2 - 16 F^2)})}$

15. F, p; $F_{,} = \frac{1}{2n}\sqrt{\left(F^2 + \frac{F^4}{p^4 n^2}\right)}$

16. a, r; $a_{,} = \sqrt{(2 r^2 - 2 r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)})} = \sqrt{r(r + \frac{1}{2} a)} - \sqrt{r(r - \frac{1}{2} a)}$

17. a, p; $a_{,} = \sqrt{(\frac{1}{2} a^2 + 2 p^2 - 2 p \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + p^2)})}$

18. r, p; $a_{,} = \sqrt{2 r (r - p)}$

19. a, r; $p_{,} = \sqrt{(\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)})}$

20. a, p; $p_{,} = \frac{a \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + p^2)}}{2 \sqrt{(\frac{1}{2} a^2 + 2 p^2 - 2 p \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + p^2)})}}$

21. r, p; $p_{,} = \sqrt{(\frac{1}{2} r (r + p))}$

b) Die Theile des Polygons von n Seiten werden aus denen des Polygons von 2n Seiten gesucht.

Gegeben:	Gesucht:
1. $\alpha_{,}$;	$\alpha = 2\alpha_{,}$
2. $\varphi_{,}$;	$\alpha = 360^\circ - 2\varphi_{,}$
3. $\beta_{,}$;	$\alpha = 360^\circ - 4\beta_{,}$
4. $\alpha_{,}$;	$\varphi = 180^\circ - 2\alpha_{,}$
5. $\varphi_{,}$;	$\varphi = 2\varphi_{,} - 180^\circ$
6. $\beta_{,}$;	$\varphi = 4\beta_{,} - 180^\circ$
7. $\alpha_{,}$;	$\beta = 90^\circ - \alpha_{,}$
8. $\varphi_{,}$;	$\beta = \varphi_{,} - 90^\circ$
9. $\beta_{,}$;	$\beta = 2\beta_{,} - 90^\circ$
10. $a_{,}$, r;	$F = \frac{a_{,}(r^2 - \frac{1}{2} a_{,}^2)}{r^2} \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a_{,}^2)} . n$
11. $a_{,}$, $p_{,}$;	$F = a_{,} p_{,} . \left(\frac{p_{,}^2 - \frac{1}{4} a_{,}^2}{p_{,}^2 + \frac{1}{4} a_{,}^2}\right) . n$
12. r, $p_{,}$;	$F = \frac{2 p_{,}(2 p_{,}^2 - r^2) . \sqrt{(r^2 - p_{,}^2)}}{r^2} . n$

13. $F_{,}$, r; $F = F_{,} \cdot \frac{\sqrt{(r^4 n^2 - 4 F_{,}^2)}}{r^2 n}$

14. $F_{,}$, $a_{,}$; $F = F_{,} \cdot \frac{16 F_{,}^2 - a_{,}^4 n^2}{16 F_{,}^2 + a_{,}^4 n^2}$

15. $F_{,}$, $p_{,}$; $F = F_{,} \cdot \frac{p_{,}^4 n^2 - F_{,}^2}{p_{,}^4 n^2 + F_{,}^2}$

16. $a_{,}$, r; $a = \frac{\sqrt{(4 a_{,}^2 r^2 - a_{,}^4)}}{r} = \frac{a_{,}}{r} \sqrt{(4 r^2 - a_{,}^2)}$

17. $a_{,}$, $p_{,}$; $a = 4 a_{,} p_{,} \sqrt{\left(\frac{1}{a_{,}^2 + 4 p_{,}^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{16 a_{,}^2 p_{,}^2}{a_{,}^2 + 4 p_{,}^2}\right)}$

18. r, $p_{,}$; $a = \frac{4 p_{,}}{r} \sqrt{(r^2 - p_{,}^2)}$

19. $a_{,}$, r; $p = \frac{r^2 - \frac{1}{2} a_{,}^2}{r}$

20. $a_{,}$, $p_{,}$; $p = \frac{p_{,}^2 - \frac{1}{4} a_{,}^2}{\sqrt{(p_{,}^2 + \frac{1}{4} a_{,}^2)}}$

21. r, $p_{,}$; $p = \frac{2 p_{,}^2 - r^2}{r} = \frac{2 p_{,}^2}{r} - r$

c) Aus den Flächenräumen der Polygone von 2n und n Seiten werden die Theile dieser Polygone gesucht.

Gegeben: Gesucht:

1. $F_{,}$, F; $r = \sqrt{\frac{F_{,}^2}{n^2 (F_{,}^2 - F^2)}} = \sqrt{\frac{F_{,}}{n} \sqrt{\frac{1}{F_{,}^2 - F^2}}}$

2. $F_{,}$, F; $a = 2 \sqrt{\frac{F_{,}^2 - F^2}{n^2}}$

3. $F_{,}$, F; $a_{,} = 2 \sqrt{\frac{F_{,}^2 (F_{,} - F)}{n^2 (F_{,} + F)}} = 2 \sqrt{\frac{F_{,}}{n} \sqrt{\frac{F_{,} - F}{F_{,} + F}}}$

4. $F_{,}$, F; $p = \sqrt{\frac{F^4}{n^2 (4 F_{,}^2 n^2 - F^2)}} = F \sqrt{\frac{1}{n^2 (4 F_{,}^2 n^2 - F^2)}}$

5. $F_{,}$, F; $p_{,} = \sqrt{\frac{F_{,}^3 + F F_{,}^2}{n^2 (F_{,} - F)}} = \sqrt{\frac{F_{,}}{n} \sqrt{\frac{F_{,} + F}{F_{,} - F}}}$

C) Reguläre Polygone im Kreise von einer bestimmten Seitenzahl.

Alle Buchstaben behalten die ihnen in VI. A. beigelegten Bedeutungen.

a) Das reguläre Dreieck (gleichseitige Dreieck).

Gegeben:		Gesucht:	
1.		$\alpha = 120^\circ$	
2.		$\varphi = 60^\circ$	
3.	r;	$a = r\sqrt{3}$	$= 1{,}7320508 \, . \, r$
		$\log a$	$= 0{,}2385606 + \log r$
4.	p;	$a = 2p\sqrt{3}$	$= 3{,}4641016 \, . \, p$
		$\log a$	$= 0{,}5395906 + \log p$
5.	F;	$a = \sqrt{\frac{4F}{\sqrt{3}}}$	$= 1{,}5196714 \, . \, \sqrt{F}$
		$\log a$	$= 0{,}1817497 + \frac{1}{2} \log F$
6.	a;	$r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$	$= 0{,}5773503 \, . \, a$
		$\log r$	$= 0{,}7614394 - 1 + \log a$
7.	p;	$r = 2p$	
8.	F;	$r = \frac{2}{3}\sqrt{F\sqrt{3}}$	$= 0{,}8773827 \, . \, \sqrt{F}$
		$\log r$	$= 0{,}9431890 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
9.	a;	$p = \frac{1}{6} a\sqrt{3}$	$= 0{,}2886751 \, . \, a$
		$\log p$	$= 0{,}4604093 - 1 + \log a$
10.	r;	$p = \frac{1}{2} r$	
11.	F;	$p = \frac{1}{3}\sqrt{F\sqrt{3}}$	$= 0{,}4386913 \, . \, \sqrt{F}$
		$\log p$	$= 0{,}6421591 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
12.	a;	$F = \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$	$= 0{,}4330127 \, . \, a^2$
		$\log F$	$= 0{,}6365006 - 1 + 2 \log a$
13.	r;	$F = \frac{3}{4} r^2\sqrt{3}$	$= 1{,}2990381 \, . \, r^2$
		$\log F$	$= 0{,}1136219 + 2 \log r$
14.	p;	$F = 3p^2\sqrt{3}$	$= 5{,}1961524 \, . \, p^2$
		$\log F$	$= 0{,}7156819 + 2 \log p$

Die Formeln 4. 5. 9. 11. 12. 14. sind mit denen in IV. C. gegebenen, begreiflicherweise übereinstimmend.

b) Das reguläre Viereck (Quadrat).

Gegeben:	Gesucht:
1.	$\alpha = 90^\circ$
2.	$\varphi = 90^\circ$
3. r;	$a = r\sqrt{2} \quad = 1{,}4142136 . r$
	$\log a = 0{,}1505150 + \log r$
4. p;	$a = 2p$
5. F;	$a = \sqrt{F}$
6. a;	$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2} = 0{,}7071068 . a$
	$\log r = 0{,}8494850 - 1 + \log a$
7. p;	$r = p\sqrt{2} \quad = 1{,}4142136 . p$
	$\log r = 0{,}1505150 + \log p$
8. F;	$r = \sqrt{\frac{1}{2} F} \quad = 0{,}7071068 . \sqrt{F}$
	$\log r = 0{,}8494850 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
9. a;	$p = \frac{1}{2} a$
10. r;	$p = \frac{1}{2} r \sqrt{2} = 0{,}7071068 . r$
	$\log p = 0{,}8494850 - 1 + \log r$
11. F;	$p = \frac{1}{2}\sqrt{F}$
12. a;	$F = a^2$
13. r;	$F = 2r^2$
14. p;	$F = 4p^2$

Auch hier sind die Formeln 5. und 12. mit den in I. gegebenen übereinstimmend.

c) Das reguläre Fünfeck (Pentagon).

Gegeben:	Gesucht:
1.	$\alpha = 72^\circ$
2.	$\varphi = 108^\circ$
3. r;	$a = r\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} \quad = 1{,}1755706 . r$
	$\log a = 0{,}0702487 + \log r$
4. p;	$a = 2p\sqrt{(5-2\sqrt{5})} \quad = 1{,}4530852 . p$
	$\log a = 0{,}1622910 + \log p$

5. F; $a = \sqrt{\tfrac{4}{5} F \sqrt{(5-2\sqrt{5})}} = 0{,}7623870 \,.\, \sqrt{F}$

$\log a = 0{,}8821755 - 1 + \tfrac{1}{2} \log F$

6. a; $r = a \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)} = 0{,}8506508 \,.\, a$

$\log r = 0{,}9297513 - 1 + \log a$

7. p; $r = p(\sqrt{5}-1) = 1{,}2360680 \,.\, p$

$\log r = 0{,}0920423 + \log p$

8. F; $r = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5} F \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)} = 0{,}6485251 \,.\, \sqrt{F}$

$\log r = 0{,}8119268 - 1 + \tfrac{1}{2} \log F$

9. a; $p = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(1+\tfrac{2}{5}\sqrt{5})} = 0{,}6881909 \,.\, a$

$\log p = 0{,}8377090 - 1 + \log a$

10. r; $p = \tfrac{1}{4} r (1+\sqrt{5}) = 0{,}8090170 \,.\, r$

$\log p = 0{,}9079577 - 1 + \log r$

11. F; $p = \sqrt{\frac{F}{5} \sqrt{(1+\tfrac{2}{5}\sqrt{5})}} = 0{,}5246679 \,.\, \sqrt{F}$

$\log p = 0{,}7198845 - 1 + \tfrac{1}{2} \log F$

12. a; $F = \tfrac{5}{4} a^2 \sqrt{(1+\tfrac{2}{5}\sqrt{5})} = 1{,}7204775 \,.\, a^2$

$\log F = 0{,}2356489 + 2 \log a$

13. r; $F = \tfrac{5}{4} r^2 \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} = 2{,}3776412 \,.\, r^2$

$\log F = 0{,}3761463 + 2 \log r$

14. p; $F = 5 p^2 \sqrt{(5-2\sqrt{5})} = 3{,}6327125 \,.\, p^2$

$\log F = 0{,}5602310 + 2 \log p$

d) Das reguläre Sechseck (Hexagon).

Gegeben:	Gesucht:
1.	$\alpha = 60^\circ$
2.	$\varphi = 120^\circ$
3. r;	$a = r$
4. p;	$a = \tfrac{2}{3} p \sqrt{3} = 1{,}1547005 \,.\, p$
	$\log a = 0{,}0624693 + \log p$

5. F; $a = \frac{1}{3}\sqrt{2F\sqrt{3}} = 0{,}6204032 . \sqrt{F}$
$\log a = 0{,}7926740 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

6. a; $r = a$
7. p; $r = \frac{2}{3} p\sqrt{3} = 1{,}1547005 . p$
$\log r = 0{,}0624693 + \log p$
8. F; $r = \frac{1}{3}\sqrt{2F\sqrt{3}} = 0{,}6204032 . \sqrt{F}$
$\log r = 0{,}7926740 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

9. a; $p = \frac{1}{2} a\sqrt{3} = 0{,}8660254 . a$
$\log p = 0{,}9375306 - 1 + \log a$
10. r; $p = \frac{1}{2} r\sqrt{3} = 0{,}8660254 . r$
$\log p = 0{,}9375306 - 1 + \log r$
11. F; $p = \sqrt{\frac{1}{6} F\sqrt{3}} = 0{,}5372849 . \sqrt{F}$
$\log p = 0{,}7302046 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

12. a; $F = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} = 2{,}5980762 . a^2$
$\log F = 0{,}4146519 + 2 \log a$
13. r; $F = \frac{3}{2} r^2\sqrt{3} = 2{,}5980762 . r^2$
$\log F = 0{,}4146519 + 2 \log r$
14. p; $F = 2 p^2\sqrt{3} = 3{,}4641016 . p^2$
$\log F = 0{,}5395907 + 2 \log p$

e) Das reguläre Siebeneck (Heptagon).

Gegeben:	Gesucht:
1.	$\alpha = 51^\circ\, 25'\, 42\frac{6}{7}''$
2.	$\varphi = 128^\circ\, 34'\, 17\frac{1}{7}''$
3. r;	$a = 0{,}8677674 . r$
	$\log a = 0{,}9384033 - 1 + \log r$
4. p;	$a = 0{,}9631492 . p$
	$\log a = 0{,}9836936 - 1 + \log p$
5. F;	$a = 0{,}5245814 . \sqrt{F}$
	$\log a = 0{,}7198128 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
6. a;	$r = 1{,}1523825 . a$
	$\log r = 0{,}0615967 + \log a$

7.	p;	$r = 1{,}1099163 \,.\, p$
		$\log r = 0{,}0452902 + \log p$
8.	F;	$r = 0{,}6045183 \,.\, \sqrt{F}$
		$\log r = 0{,}7814095 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
9.	a;	$p = 1{,}0382608 \,.\, a$
		$\log p = 0{,}0163064 + \log a$
10.	r;	$p = 0{,}9009688 \,.\, r$
		$\log p = 0{,}9547096 - 1 + \log r$
11.	F;	$p = 0{,}5446521 \,.\, \sqrt{F}$
		$\log p = 0{,}7361192 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
12.	a;	$F = 3{,}6339127 \,.\, a^2$
		$\log F = 0{,}5603745 + 2 \log a$
13.	r;	$F = 2{,}7364103 \,.\, r^2$
		$\log F = 0{,}4371812 + 2 \log r$
14.	p;	$F = 3{,}3710222 \,.\, p^2$
		$\log F = 0{,}5277616 + 2 \log p$

f) Das reguläre Achteck (Oktogon).

Gegeben:		Gesucht:	
1.		$\alpha = 45^\circ$	
2.		$\varphi = 135^\circ$	
3.	r;	$a = r\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$	$= 0{,}7653668 \,.\, r$
			$\log a = 0{,}8838696 - 1 + \log r$
4.	p;	$a = 2p\,(\sqrt{2} - 1)$	$= 0{,}8284271 \,.\, p$
			$\log a = 0{,}9182543 - 1 + \log p$
5.	F;	$a = \sqrt{\frac{1}{2} F (\sqrt{2} - 1)}$	$= 0{,}4550899 \,.\, \sqrt{F}$
			$\log a = 0{,}6580971 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
6.	a;	$r = a\sqrt{(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})}$	$= 1{,}3065629 \,.\, a$
			$\log r = 0{,}1161303 + \log a$
7.	p;	$r = 2p\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})}$	$= 1{,}0823922 \,.\, p$
			$\log r = 0{,}0343846 + \log p$
8.	F;	$r = \sqrt{\frac{1}{4} F \sqrt{2}}$	$= 0{,}5946036 \,.\, \sqrt{F}$
			$\log r = 0{,}7742275 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

9. a; $p = \frac{1}{2} a (1 + \sqrt{2}) = 1{,}2071068 . a$
$log\, p = 0{,}0817456 + log\, a$

10. r; $p = \frac{1}{2} r \sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 0{,}9238795 . r$
$log\, p = 0{,}9656153 - 1 + log\, r$

11. F; $p = \sqrt{\frac{1}{8} F (\sqrt{2} + 1)} = 0{,}5493420 . \sqrt{F}$
$log\, p = 0{,}7398428 - 1 + \frac{1}{2}\, log\, F$

12. a; $F = 2 a^2 (1 + \sqrt{2}) = 4{,}8284271 . a^2$
$log\, F = 0{,}6838056 + 2\, log\, a$

13. r; $F = 2 r^2 \sqrt{2} = 2{,}8284271 . r^2$
$log\, F = 0{,}4515450 + 2\, log\, r$

14. p; $F = 8 p^2 (\sqrt{2} - 1) = 3{,}3137085 . p^2$
$log\, F = 0{,}5203143 + 2\, log\, p$

g). Das reguläre Neuneck (Enneagon).

Gegeben: Gesucht:

1. $\alpha = 40^\circ$

2. $\varphi = 140^\circ$

3. r; $a = 0{,}6840402 . r$
$log\, a = 0{,}8350816 - 1 + log\, r$

4. p; $a = 0{,}7279404 . p$
$log\, a = 0{,}8620958 - 1 + log\, p$

5. F; $a = 0{,}4021997 . \sqrt{F}$
$log\, a = 0{,}6044417 - 1 + \frac{1}{2}\, log\, F$

6. a; $r = 1{,}4619022 . a$
$log\, r = 0{,}1649183 + log\, a$

7. p; $r = 1{,}0641778 . p$
$log\, r = 0{,}0270141 + log\, p$

8. F; $r = 0{,}5879766 . \sqrt{F}$
$log\, r = 0{,}7693600 - 1 + \frac{1}{2}\, log\, F$

9. a; $p = 1{,}3737387 . a$
$log\, p = 0{,}1379041 + log\, a$

10. r; $p = 0{,}9396926 . r$
$log\, p = 0{,}9729857 - 1 + log\, r$

11. F; $p = 0{,}5525173 . \sqrt{F}$
$\log p = 0{,}7423458 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

12. a; $F = 6{,}1818242 . a^2$
$\log F = 0{,}7911167 + 2 \log a$

13. r; $F = 2{,}8925442 . r^2$
$\log F = 0{,}4612800 + 2 \log r$

14. p; $F = 3{,}2757318 . p^2$
$\log F = 0{,}5153083 + 2 \log p$

h) Das reguläre Zehneck (Dekagon).

Gegeben: Gesucht:

1. $\alpha = 36^0$

2. $\varphi = 144^0$

3. r; $a = \frac{1}{2} r (\sqrt{5} - 1) = 0{,}6180340 . r$
$\log a = 0{,}7910124 - 1 + \log r$

4. p; $a = 2p \sqrt{\left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right)} = 0{,}6498394 . p$
$\log a = 0{,}8128059 - 1 + \log p$

5. F; $a = \sqrt{\frac{2F}{5} \sqrt{\left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}\right)}} = 0{,}3605106 . \sqrt{F}$
$\log a = 0{,}5569180 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

6. a; $r = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} + 1) = 1{,}6180340 . a$
$\log r = 0{,}2089876 + \log a$

7. p; $r = p \sqrt{\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)} = 1{,}0514622 . p$
$\log r = 0{,}0217937 + \log p$

8. F; $r = \sqrt{\frac{F}{5} \sqrt{\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}\right)}} = 0{,}5833183 . \sqrt{F}$
$\log r = 0{,}7659056 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

9. a; $p = \frac{1}{2} a \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} = 1{,}5388418 . a$
$\log p = 0{,}1871940 + \log a$

10. r; $p = \frac{1}{4} r \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 0{,}9510565 . r$
$\log p = 0{,}9782063 - 1 + \log r$

11. F; $p = \sqrt{\frac{1}{10} F \sqrt{(5+2\sqrt{5})}} = 0{,}5547688 . \sqrt{F}$
$\log p = 0{,}7441120 - 1 + \frac{1}{2} \log F$

12. a; $F = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{(5+2\sqrt{5})} = 7{,}6942087 . a^2$
$\log F = 0{,}8861639 + 2 \log a$

13. r; $F = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{(10-2\sqrt{5})} = 2{,}9389265 . r^2$
$\log F = 0{,}4681887 + 2 \log r$

14. p; $F = 2 p^2 \sqrt{5(5-2\sqrt{5})} = 3{,}2491970 . p^2$
$\log F = 0{,}5117760 + 2 \log p$

i) Das reguläre Eilfeck (Endekagon).

Gegeben:		Gesucht:
1.		$\alpha = 32^0\, 43'\, 38\frac{2}{11}''$
2.		$\varphi = 147^0\, 16'\, 21\frac{9}{11}''$
3.	r;	$a = 0{,}5634652 . r$
		$\log a = 0{,}7508671 - 1 + \log r$
4.	p;	$a = 0{,}5872530 . p$
		$\log a = 0{,}6788252 - 1 + \log p$
5.	F;	$a = 0{,}3267618 . \sqrt{F}$
		$\log a = 0{,}5142313 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
6.	a;	$r = 1{,}7747331 . a$
		$\log r = 0{,}2491330 + \log a$
7.	p;	$r = 1{,}0422171 . p$
		$\log r = 0{,}0179582 + \log p$
8.	F;	$r = 0{,}5799149 . \sqrt{F}$
		$\log r = 0{,}7633643 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
9.	a;	$p = 1{,}7028439 . a$
		$\log p = 0{,}2311748 + \log a$
10.	r;	$p = 0{,}9594930 . r$
		$\log p = 0{,}9820419 - 1 + \log r$
11.	F;	$p = 0{,}5564244 . \sqrt{F}$
		$\log p = 0{,}7454061 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
12.	a;	$F = 9{,}3656415 . a^2$
		$\log F = 0{,}9715374 + 2 \log a$

13.	r;	$F = 2{,}9735244 . r^2$	
		$\log F = 0{,}4732714 + 2 \log r$	
14.	p;	$F = 3{,}2298915 . p^2$	
		$\log F = 0{,}5091880 + 2 \log r$	

k) Das reguläre Zwölfeck (Dodekagon).

Gegeben:		Gesucht:	
1.		$\alpha = 30^0$	
2.		$\varphi = 150^0$	
3.	r;	$a = \frac{1}{2} r (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$= 0{,}5176381 . r$
		$\log a$	$= 0{,}7140261 - 1 + \log r$
4.	p;	$a = 2 p (2 - \sqrt{3})$	$= 0{,}5358984 . p$
		$\log a$	$= 0{,}7290825 - 1 + \log p$
5.	F;	$a = \sqrt{\frac{1}{3} F (2 - \sqrt{3})}$	$= 0{,}2988585 . \sqrt{F}$
		$\log a$	$= 0{,}4754656 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
6.	a;	$r = \frac{1}{2} a (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$= 1{,}9318516 . a$
		$\log r$	$= 0{,}2859737 + \log a$
7.	p;	$r = \frac{1}{2} p (\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$= 0{,}5176381 . p$
		$\log r$	$= 0{,}7140261 - 1 + \log p$
8.	F;	$r = \sqrt{\frac{1}{3} F}$	$= 0{,}5773503 . \sqrt{F}$
		$\log r$	$= 0{,}7614394 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
9.	a;	$p = \frac{1}{2} a (2 + \sqrt{3})$	$= 1{,}8660254 . a$
		$\log p$	$= 0{,}2709175 + \log a$
10.	r;	$p = \frac{1}{2} r (\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$= 1{,}9318516 . r$
		$\log p$	$= 0{,}2859737 + \log r$
11.	F;	$p = \sqrt{\frac{1}{3} F (2 + \sqrt{3})}$	$= 1{,}1153551 . \sqrt{F}$
		$\log p$	$= 0{,}0474132 + \frac{1}{2} \log F$
12.	a;	$F = 3 a^2 (2 + \sqrt{3})$	$= 11{,}1961524 . a^2$
		$\log F$	$= 1{,}0490688 + 2 \log a$
13.	r;	$F = 3 r^2$	
14.	p;	$F = 3 p^2 (2 - \sqrt{3})$	$= 0{,}8038476 . p^2$
		$\log F$	$= 0{,}9051737 - 1 + 2 \log p$

1) Die regulären Polygone bis zum Vierundzwanzig Eck.

Gegeben:	Gesucht:	Das dreizehn Eck.	Das vierzehn Eck.
1.	$\alpha =$	$27^\circ\,41'\,32\frac{4}{13}''$	$25^\circ\,42'\,51\frac{3}{7}''$
2.	$\varphi =$	$152^\circ\,18'\,27\frac{9}{13}''$	$154^\circ\,17'\,8\frac{4}{7}''$
3. r;	$a =$	$0{,}4786312 \cdot r$	$0{,}4450419 \cdot r$
	$\log a =$	$0{,}6800009 - 1 + \log r$	$0{,}6484008 - 1 + \log r$
4. a;	$r =$	$2{,}0892913 \cdot a$	$2{,}2469806 \cdot a$
	$\log r =$	$0{,}3199989 + \log a$	$0{,}3515993 + \log a$
5. a;	$p =$	$2{,}0285803 \cdot a$	$2{,}1906441 \cdot a$
	$\log p =$	$0{,}3071921 + \log a$	$0{,}3405718 + \log a$
6. a;	$F =$	$13{,}1857719 \cdot a^2$	$15{,}3345084 \cdot a^2$
	$\log F =$	$1{,}1201055 + 2 \log a$	$1{,}1856699 + 2 \log a$

		Das funfzehn Eck.	Das sechszehn Eck.
1.	$\alpha =$	24°	$22^\circ\,30'$
2.	$\varphi =$	156°	$157^\circ\,30'$
3. r;	$a =$	$0{,}4158234 \cdot r$	$0{,}3901806 \cdot r$
	$\log a =$	$0{,}6189089 - 1 + \log r$	$0{,}5912656 - 1 + \log r$
4. a;	$r =$	$2{,}4048672 \cdot a$	$2{,}5629155 \cdot a$
	$\log r =$	$0{,}3810983 + \log a$	$0{,}4087343 + \log a$
5. a;	$p =$	$2{,}3523150 \cdot a$	$2{,}5136698 \cdot a$
	$\log p =$	$0{,}3714955 + \log a$	$0{,}4003081 + \log a$
6. a;	$F =$	$17{,}6423629 \cdot a^2$	$20{,}1093580 \cdot a^2$
	$\log F =$	$1{,}2465567 + 2 \log a$	$1{,}3033982 + 2 \log a$

Gegeben:		Das siebzehn Eck. Gesucht:	Das achtzehn Eck.
1.		$\alpha = 21^\circ\, 10'\, 35\frac{5}{17}''$	20°
2.		$\varphi = 158^\circ\, 49'\, 24\frac{12}{17}''$	160°
3.	r;	$a = 0{,}3674990 \,.\, r$	$0{,}3472964 \,.\, r$
		$\log a = 0{,}5652561 - 1 + \log r$	$0{,}5407003 - 1 + \log r$
4.	a;	$r = 2{,}7210969 \,.\, a$	$2{,}8793853 \,.\, a$
		$\log r = 0{,}4347440 + \log a$	$0{,}4592998 + \log a$
5.	a;	$p = 2{,}6747652 \,.\, a$	$2{,}8356409 \,.\, a$
		$\log p = 0{,}4272856 + \log a$	$0{,}4526512 + \log a$
6.	a;	$F = 22{,}7355038 \,.\, a^2$	$25{,}5207681 \,.\, a^2$
		$\log F = 1{,}3567046 + 2 \log a$	$1{,}4068937 + 2 \log a$

		Das neunzehn Eck.	Das zwanzig Eck.
1.		$\alpha = 18^\circ\, 56'\, 50\frac{10}{19}''$	18°
2.		$\varphi = 161^\circ\, 3'\, 9\frac{9}{19}''$	162°
3.	r;	$a = 0{,}3291892 \,.\, r$	$0{,}3128690 \,.\, r$
		$\log a = 0{,}5174455 - 1 + \log r$	$0{,}4953625 - 1 + \log r$
4.	a;	$r = 3{,}0377692 \,.\, a$	$3{,}1962266 \,.\, a$
		$\log r = 0{,}4825548 + \log a$	$0{,}5046375 + \log a$
5.	a;	$p = 2{,}9963380 \,.\, a$	$3{,}1568758 \,.\, a$
		$\log p = 0{,}4765908 + \log a$	$0{,}4992575 + \log a$
6.	a;	$F = 28{,}4652110 \,.\, a^2$	$31{,}5687575 \,.\, a^2$
		$\log F = 1{,}4543143 + 2 \log a$	$1{,}4992574 + 2 \log a$

Gegeben:	Gesucht:	Das einundzwanzig Eck.	Das zweiundzwanzig Eck.
1.	$\alpha =$	$17^\circ\ 8'\ 34\frac{2}{7}''$	$16^\circ\ 21'\ 49\frac{1}{11}''$
2.	$\varphi =$	$162^\circ\ 51'\ 25\frac{5}{7}''$	$163^\circ\ 38'\ 10\frac{10}{11}''$
3. r;	$a =$	0,2980846 . r	0,2846296 . r
	$\log a =$	0,4743394 — 1 + *log* r	0,4542801 — 1 + *log* r
4. a;	$r =$	3,3547557 . a	3,5133383 . a
	$\log r =$	0,5256609 + *log* a	0,5457199 + *log* a
5. a;	$p =$	3,3172859 . a	3,4775776 . a
	$\log p =$	0,5207828 + *log* a	0,5412768 + *log* a
6. a;	$F =$	34,8315014 . a^2	38,2533531 . a^2
	$\log F =$	1,5419722 + 2 *log* a	1,5826695 + 2 *log* a

		Das dreiundzwanzig Eck.	Das vierundzwanzig Eck.
1.	$\alpha =$	$15^\circ\ 39'\ 7\frac{19}{23}''$	15°
2.	$\varphi =$	$164^\circ\ 20'\ 52\frac{4}{23}''$	165°
3. r;	$a =$	0,2723333 . r	0,2610524 . r
	$\log a =$	0,4351007 — 1 + *log* r	0,4167276 — 1 + *log* r
4. a;	$r =$	3,6719752 . a	3,8306488 . a
	$\log r =$	0,5648997 + *log* a	0,5832723 + *log* a
5. a;	$p =$	3,6377743 . a	3,7978771 . a
	$\log p =$	0,5608357 + *log* a	0,5795409 + *log* a
6. a;	$F =$	41,8344045 . a^2	45,5745246 . a^2
	$\log F =$	1,6215336 + 2 *log* a	1,6587221 + 2 *log* a

VII. Der Kreis.

A) Cyclometrische Hülfszahlen.

a) Annähernde Werthe für die Verhältnisse des Durchmessers zur Peripherie, zur Fläche des Kreises und zum körperlichen Inhalt der Kugel.

1) Das Verhältnifs des Durchmessers zur Peripherie =

$1 : \pi$

= 1 zu 3,141592653589 793238462643 383279502884 197169399375
105820974944 592307816406 286208998628 034825342117
067982148086 513282306647 093844609550 58226136....

oder logarithmisch, wie:

0 zu 0,497149872694133854351268....

Dieses Verhältnifs wird annähernd ausgedrückt durch:

$$\frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots.$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}14150\ldots.$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots.$$

$$\frac{103993}{33102} = 3{,}1415926531\ldots.$$

$$\frac{104348}{33215} = 3{,}1415926539\ldots.$$

$$\frac{208341}{66317} = 3{,}1415926535\ldots.$$

$$\frac{312689}{99532} = 3{,}1415926536\ldots.$$

$$\frac{833719}{265381} = 3{,}141592653581\ldots.$$

2) Das Verhältnifs des Quadrats des Durchmessers zur Kreisfläche =
1 zu 0,7853981633397....
oder logarithmisch, wie:
10 zu 9,8950898814....

Dieses Verhältnifs wird annähernd ausgedrückt durch:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\frac{7}{9} = 0{,}7777....$$

$$\frac{11}{14} = 0{,}7857....$$

$$\frac{172}{219} = 0{,}78538....,$$

$$\frac{355}{452} = 0{,}7853982....$$

3) Das Verhältnifs des Durchmessers zur Seite eines Quadrats, dessen Fläche der Kreisfläche gleich wäre =
1 zu 0,886226925453....
oder logarithmisch, wie:
10 zu 9,9475448....

Dieses Verhältnifs wird annähernd ausgedrückt durch:

$$\frac{7}{8} = 0{,}87....$$

$$\frac{8}{9} = 0{,}888....$$

$$\frac{31}{35} = 0{,}885....$$

$$\frac{39}{44} = 0{,}8863....$$

$$\frac{109}{123} = 0{,}8861....$$

4) Das Verhältnifs des Cubus des Durchmessers zum körperlichen Inhalte der Kugel =

1 zu 0,523198775598....

oder logarithmisch, wie:

10 zu 9,7189986223....

Dieses Verhältnifs wird annähernd ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{11}{21} = 0{,}5238\ldots.$$

$$\frac{111}{212} = 0{,}5235\ldots.$$

$$\frac{122}{233} = 0{,}5236\ldots.$$

$$\frac{233}{445} = 0{,}5235\ldots.$$

$$\frac{355}{678} = 0{,}5235\ldots.$$

Anmerkung. Ueber die unendlichen Reihen, durch welche das Verhältnifs des Durchmessers zum Umkreise ausgedrückt wird, siehe den betreffenden Artikel in der trigonometrischen Abtheilung dieses Werkes.

b) Multipla und Quotienten von π.

aa) Werthe von $n\pi$

$2\pi = 6{,}283185307180$

$3\pi = 9{,}424777960769$

$4\pi = 12{,}566370614359$

$5\pi = 15{,}707963267949$

$6\pi = 18{,}849555921539$

$7\pi = 21{,}991148575129$

$8\pi = 25{,}132741228718$

$9\pi = 28{,}274333882308$

bb) Werthe von $\frac{\pi}{n}$

$\frac{\pi}{2} = 1{,}570796326795$

$\frac{\pi}{3} = 1{,}047197551197$

$\frac{\pi}{4} = 0{,}785398163397$

$\frac{\pi}{5} = 0{,}628318530718$

$\frac{\pi}{6} = 0{,}523598775599$

$\frac{\pi}{7} = 0{,}448798950513$

$\frac{\pi}{8} = 0{,}392699081699$

$\frac{\pi}{9} = 0{,}349065850399$

cc) Werthe von $\frac{n}{\pi}$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886184$

$\frac{2}{\pi} = 0{,}636619772368$

$\frac{3}{\pi} = 0{,}954929658551$

$\frac{4}{\pi} = 1{,}273239544735$

$\frac{5}{\pi} = 1{,}591549430919$

$\frac{6}{\pi} = 1{,}909859317103$

$\frac{7}{\pi} = 2{,}228169203287$

$\frac{8}{\pi} = 2{,}546479089470$

$\frac{9}{\pi} = 2{,}864788975654$

dd) Multipla von $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} . 1 = 0{,}785398163397$

$\frac{\pi}{4} . 2 = 1{,}570796326795$

$\frac{\pi}{4} . 3 = 2{,}356194490192$

$\frac{\pi}{4} . 4 = 3{,}141592653590$

$\frac{\pi}{4} . 5 = 3{,}926990816987$

$\frac{\pi}{4} . 6 = 4{,}712388980385$

$\frac{\pi}{4} . 7 = 5{,}497787143782$

$\frac{\pi}{4} . 8 = 6{,}283185307179$

$\frac{\pi}{4} . 9 = 7{,}068583470577$

ee) Multipla von $\frac{1}{4\pi}$

$\frac{1}{4\pi} . 1 = 0{,}079577471546$

$\frac{1}{4\pi} . 2 = 0{,}159154943092$

$\frac{1}{4\pi} . 3 = 0{,}238732414638$

$\frac{1}{4\pi} . 4 = 0{,}318309886184$

$\frac{1}{4\pi} . 5 = 0{,}397887357730$

$\frac{1}{4\pi} . 6 = 0{,}477464829276$

$\frac{1}{4\pi} . 7 = 0{,}557042300822$

$\frac{1}{4\pi} . 8 = 0{,}636619772367$

$\frac{1}{4\pi} . 9 = 0{,}716197243913$

ff) Multipla von $\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}.1 = 0{,}523598775598$

$\frac{\pi}{6}.2 = 1{,}047197551197$

$\frac{\pi}{6}.3 = 1{,}570796326795$

$\frac{\pi}{6}.4 = 2{,}094395102393$

$\frac{\pi}{6}.5 = 3{,}617993877991$

$\frac{\pi}{6}.6 = 3{,}141592653590$

$\frac{\pi}{6}.7 = 3{,}665191429188$

$\frac{\pi}{6}.8 = 4{,}188790204786$

$\frac{\pi}{6}.9 = 4{,}712388980385$

gg) Multipla von $\frac{1}{12}\pi$

$\frac{1}{12}\pi.1 = 0{,}261799387799$

$\frac{1}{12}\pi.2 = 0{,}523598775598$

$\frac{1}{12}\pi.3 = 0{,}785398163397$

$\frac{1}{12}\pi.4 = 1{,}047197551197$

$\frac{1}{12}\pi.5 = 1{,}308996938996$

$\frac{1}{12}\pi.6 = 1{,}570796326795$

$\frac{1}{12}\pi.7 = 1{,}832595714594$

$\frac{1}{12}\pi.8 = 2{,}094395102393$

$\frac{1}{12}\pi.9 = 2{,}356194490192$

hh) Multipla von $2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.1 = 0{,}128379167096$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.2 = 2{,}256758334191$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.3 = 3{,}385137501287$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.4 = 4{,}513516668382$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.5 = 5{,}641895835478$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.6 = 6{,}770275002573$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.7 = 7{,}898654169669$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.8 = 9{,}027033336764$

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}.9 = 10{,}155412503860$

ii) Multipla von $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.1 = 0{,}805995977008$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.2 = 1{,}611991954016$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.3 = 2{,}417987931025$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.4 = 3{,}223983908033$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.5 = 4{,}029979885041$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.6 = 4{,}835975862049$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.7 = 5{,}641971839058$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.8 = 6{,}447967816066$

$\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}.9 = 7{,}253963793074$

kk) Multipla von $\sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}}$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.1 = 1,240700981799$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.2 = 2,481401963598$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.3 = 3,722102945396$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.4 = 4,962803927195$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.5 = 6,203504908994$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.6 = 7,444205890792$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.7 = 8,684906872592$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.8 = 9,925607854390$

$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{1}{6}\pi}\right)}.9 = 11,166308836189$

ll) Einzelne Angaben.

$log\ \pi = 0,497149872694$

$log\ \frac{1}{\pi} = 9,502850127306 - 10$

$log\ nat\ \pi = 1,144729885849$

$\pi^2 = 9,869604401090$

$log\ \pi^2 = 0,994299745388$

$\pi^3 = 31,006276680003$

$log\ \pi^3 = 1,491449618082$

$\sqrt{\pi} = 1,772453850906$

$log\ \sqrt{\pi} = 0,248574936471$

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,564189583548$

$\sqrt{\frac{\pi}{10}} = 0,560499121638$

$\sqrt[3]{\pi} = 1,464591893338$

$log\ \sqrt[3]{\pi} = 0,165716624231$

$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,805995977008$

c) Verwandlung der Winkel in Bogen.

aa) Tafel der Bogenlängen für den Halbmesser = 1.

1) Die Grade.

1°	= 0,01745329
2°	= 0,03490659
3°	= 0,05235988
4°	= 0,06981317
5°	= 0,08726646
6°	= 0,10471976
7°	= 0,12217305
8°	= 0,13962634
9°	= 0,15707963
10°	= 0,17453293
20°	= 0,34906585
30°	= 0,52359878
40°	= 0,69813170
50°	= 0,87266463
60°	= 1,04719755
70°	= 1,22173048
80°	= 1,39626340
90°	= 1,57079633
100°	= 1,74532925
110°	= 1,91986218
120°	= 2,09439510
130°	= 2,26892803
140°	= 2,44346095
150°	= 2,61799388
160°	= 2,79252680
170°	= 2,96705973
180°	= 3,14159265
270°	= 4,71238898
360°	= 6,28318531

2) Die Minuten.

1′	= 0,00029089
2′	= 0,00058178
3′	= 0,00087266
4′	= 0,00116355
5′	= 0,00145444
6′	= 0,00174533
7′	= 0,00203622
8′	= 0,00232711
9′	= 0,00261799
10′	= 0,00290888
20′	= 0,00581776
30′	= 0,00872665
40′	= 0,01163553
50′	= 0,01454441

3) Die Secunden.

1″	= 0,00000485
2″	= 0,00000970
3″	= 0,00001454
4″	= 0,00001939
5″	= 0,00002424
6″	= 0,00002909
7″	= 0,00003394
8″	= 0,00003879
9″	= 0,00004363
10″	= 0,00004848
20″	= 0,00009696
30″	= 0,00014544
40″	= 0,00019393
50″	= 0,00024241

Anmerkung. Ausführliche Tafeln für die Längen der Kreisbogen giebt Lambert *Suppl. tab. log. et trig. Tab. XXIII.* auf 27 Decimal-Stellen für jeden einzelnen Grad. Desgleichen Cagnoli *Trigon. rect. et sph. Tab. AA.*

bb) Einzelne Hülfszahlen.

1. $arc = rad = 57^{\circ}\ 17'\ 44''\ 48'''\ 22^{IV}\ 29^{V}\ 21^{VI}$
2. $= 57^{\circ},2957795129$
3. $= 206264'',806247$
4. $\log 1^{\circ} = 8,2418773676 - 10$
5. $\log 1' = 6,4637261172 - 10$
6. $\log 1'' = 4,6855748668 - 10$
7. $\log \frac{180^{\circ}}{\pi} = 1,7581226324 = \log 57^{\circ},2957795129$
8. $\log \frac{10800'}{\pi} = 3,5362738827$
9. $\log \frac{648000''}{\pi} = 5,3144251332 = \log 206264'',806247$ 17-6.2

Anmerkung. Alle auf die Functionen des Kreises sich beziehenden Formeln und Reihen finden ihre Stelle in der analytischen Trigonometrie und sind dort aufzusuchen.

B) Berechnung der Linien und Flächen bei dem ganzen Kreise.

Es sei der Flächeninhalt eines Kreises $= F$
seine Peripherie $= p$
der Durchmesser $= d$
der Halbmesser $= r$

Gegeben:	Gesucht:
1. r;	$F = r^2\pi = 3{,}141592653590 . r^2$
	$\log F = 0{,}4971498726 + 2 \log r$
2. d;	$F = \frac{1}{4} d^2\pi = 0{,}785398163397 . d^2$
	$\log F = 0{,}8950898815 - 1 + 2 \log d$
3. p;	$F = \frac{1}{4} . \frac{p^2}{\pi} = 0{,}079577471546 . p^2$
	$\log F = 0{,}9007901360 - 2 + 2 \log p$
4. r;	$p = 2r\pi = 6{,}283185307180 . r$
	$\log p = 0{,}7981798684 + \log r$
5. d;	$p = d\pi = 3{,}141592653590 . d$
	$\log p = 0{,}4971498726 + \log d$
6. F;	$p = 2\sqrt{F\pi} = 3{,}544907701812 . \sqrt{F}$
	$\log p = 0{,}5496049322 + \frac{1}{2} \log F$
7. d;	$r = \frac{1}{2} d$
8. p;	$r = \frac{1}{2} . \frac{p}{\pi} = 0{,}159154943092 . p$
	$\log r = 0{,}2018201323 - 1 + \log p$
9. F;	$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}564189583548 . \sqrt{F}$
	$\log r = 0{,}7514250636 - 1 + \frac{1}{2} \log F$
10. r;	$d = 2r$
11. p;	$d = \frac{p}{\pi} = 0{,}318309886184 . p$
	$\log d = 0{,}5028501273 - 1 + \log p$
12. F;	$d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 1{,}128379167096 . \sqrt{F}$
	$\log d = 0{,}0524550595 + \frac{1}{2} \log F$

Zusatz.

Zur Erleichterung der häufig vorkommenden Kreisrechnungen dient, da wo keine gröſsere Genauigkeit erforderlich ist, folgende Tafel, welche die Flächen der Kreise für den Durchmesser von 1 — 1000 enthält.

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
1	0,785	31	754,7	61	2922
2	3,141	32	804,2	62	3019
3	7,067	33	855,2	63	3117
4	12,57	34	907,8	64	3217
5	19,63	35	962,0	65	3318
6	28,27	36	1018	66	3421
7	38,48	37	1075	67	3525
8	50,26	38	1134	68	3631
9	63,61	39	1194	69	3739
10	78,53	40	1256	70	3848
11	95,02	41	1321	71	3959
12	113,1	42	1385	72	4071
13	132,7	43	1452	73	4185
14	153,9	44	1520	74	4300
15	176,7	45	1590	75	4417
16	201,1	46	1662	76	4536
17	226,9	47	1735	77	4656
18	254,4	48	1809	78	4778
19	283,5	49	1885	79	4901
20	314,1	50	1963	80	5026
21	346,3	51	2043	81	5153
22	380,1	52	2124	82	5280
23	415,5	53	2206	83	5410
24	452,3	54	2290	84	5541
25	490,8	55	2376	85	5674
26	530,9	56	2463	86	5808
27	572,5	57	2551	87	5944
28	615,7	58	2642	88	6082
29	660,5	59	2734	89	6221
30	706,8	60	2827	90	6361

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
91	6503	126	12468	161	20358
92	6647	127	12667	162	20611
93	6792	128	12867	163	20867
94	6939	129	13069	164	21124
95	7087	130	13273	165	21382
96	7237	131	13478	166	21642
97	7389	132	13684	167	21903
98	7542	133	13892	168	22167
99	7697	134	14102	169	22431
100	7853	135	14313	170	22698
101	8011	136	14526	171	22965
102	8171	137	14741	172	23235
103	8332	138	14957	173	23506
104	8494	139	15174	174	23778
105	8659	140	15393	175	24052
106	8824	141	15614	176	24328
107	8992	142	15836	177	24605
108	9160	143	16060	178	24884
109	9331	144	16286	179	25164
110	9503	145	16512	180	25446
111	9676	146	16741	181	25730
112	9852	147	16971	182	26015
113	10028	148	17203	183	26302
114	10207	149	17436	184	26590
115	10386	150	17671	185	26880
116	10568	151	17907	186	27171
117	10751	152	18145	187	27464
118	10935	153	18385	188	27759
119	11122	154	18626	189	28055
120	11309	155	18869	190	28352
121	11499	156	19113	191	28652
122	11689	157	19359	192	28952
123	11882	158	19606	193	29255
124	12076	159	19855	194	29559
125	12271	160	20106	195	29864

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
196	30171	231	41909	266	55571
197	30480	232	42273	267	55990
198	30790	233	42638	268	56410
199	31102	234	43005	269	56832
200	31415	235	43373	270	57255
201	31730	236	43743	271	57680
202	32047	237	44115	272	58106
203	32365	238	44488	273	58534
204	32685	239	44862	274	58964
205	33006	240	45238	275	59395
206	33329	241	45616	276	59828
207	33653	242	45996	277	60262
208	33979	243	46376	278	60698
209	34306	244	46759	279	61136
210	34636	245	47143	280	61575
211	34966	246	47529	281	62015
212	35298	247	47916	282	62458
213	35632	248	48305	283	62901
214	35968	249	48695	284	63347
215	36305	250	49087	285	63793
216	36643	251	49480	286	64242
217	36983	252	49875	287	64692
218	37325	253	50272	288	65144
219	37668	254	50670	289	65567
220	38013	255	51070	290	66051
221	38359	256	51471	291	66508
222	38707	257	51874	292	66966
223	39057	258	52279	293	67425
224	39408	259	52685	294	67886
225	39760	260	53092	295	68349
226	40114	261	53502	296	68813
227	40470	262	53912	297	69279
228	40828	263	54325	298	69746
229	41187	264	54739	299	70215
230	41547	265	55154	300	70685

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
301	71157	336	88668	371	108102
302	71631	337	89196	372	108686
303	72106	338	89727	373	109271
304	72583	339	90258	374	109858
305	73061	340	90792	375	110446
306	73541	341	91326	376	111036
307	74022	342	91863	377	111627
308	74506	343	92401	378	112220
309	74990	344	92940	379	112815
310	75476	345	93482	380	113411
311	75964	346	94024	381	114009
312	76453	347	94569	382	114608
313	76944	348	95114	383	115209
314	77437	349	95662	384	115811
315	77931	350	96211	385	116415
316	78426	351	96761	386	117021
317	78923	352	97313	387	117628
318	79422	353	97867	388	118236
319	79922	354	98422	389	118847
320	80424	355	98979	390	119459
321	80928	356	99598	391	120072
322	81433	357	100098	392	120687
323	81939	358	100659	393	121303
324	82447	359	101222	394	121922
325	82957	360	101787	395	122541
326	83468	361	102353	396	123162
327	83981	362	102921	397	123785
328	84496	363	103491	398	124410
329	85012	364	104062	399	125036
330	85529	365	104634	400	125663
331	86049	366	105208	401	126292
332	86569	367	105784	402	126923
333	87092	368	106361	403	127555
334	87615	369	106940	404	128189
335	88141	370	107521	405	128824

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
406	129461	441	152745	476	177952
407	130100	442	153438	477	178700
408	130740	443	154133	478	179450
409	131382	444	154830	479	180202
410	132025	445	155528	480	180955
411	132670	446	156228	481	181710
412	133316	447	156929	482	182466
413	133964	448	157632	483	183224
414	134614	449	158337	484	183984
415	135265	450	159043	485	184745
416	135917	451	159750	486	185507
417	136572	452	160459	487	186272
418	137227	453	161170	488	187037
419	137885	454	161883	489	187805
420	138544	455	162597	490	188574
421	139204	456	163312	491	189344
422	139866	457	164029	492	190116
423	140530	458	164748	493	190890
424	141195	459	165468	494	191665
425	141862	460	166190	495	192442
426	142530	461	166913	496	193220
427	143200	462	167638	497	194000
428	143872	463	168365	498	194781
429	144545	464	169093	499	195564
430	145220	465	169822	500	196349
431	145896	466	170553	501	197135
432	146574	467	171286	502	197923
433	147253	468	172021	503	198712
434	147934	469	172756	504	199503
435	148616	470	173494	505	200296
436	149301	471	174233	506	201090
437	149986	472	174974	507	201885
438	150673	473	175716	508	202682
439	151362	474	176460	509	203481
440	152053	475	177205	510	204282

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
511	205083	546	234139	581	265119
512	205887	547	234998	582	266033
513	206692	548	235858	583	266948
514	207499	549	236719	584	267864
515	208307	550	237582	585	268782
516	209116	551	238447	586	269702
517	209928	552	239313	587	270623
518	210741	553	240181	588	271546
519	211555	554	241051	589	272471
520	212371	555	241922	590	273397
521	213189	556	242794	591	274324
522	214008	557	243668	592	275253
523	214829	558	244544	593	276184
524	215651	559	245422	594	277116
525	216475	560	246300	595	278050
526	217300	561	247181	596	278985
527	218127	562	248063	597	279922
528	218956	563	248946	598	280861
529	219786	564	249832	599	281801
530	220618	565	250718	600	282743
531	221451	566	251607	601	283686
532	222286	567	252496	602	284631
533	223122	568	253388	603	285577
534	223960	569	254281	604	286525
535	224800	570	255175	605	287475
536	225641	571	256072	606	288426
537	226484	572	256969	607	289379
538	227328	573	257868	608	290333
539	228174	574	258769	609	291289
540	229022	575	259672	610	292246
541	229871	576	260576	611	293205
542	230721	577	261481	612	294166
543	231573	578	262388	613	295128
544	232427	579	263297	614	296091
545	233282	580	264207	615	297057

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
616	298024	651	332852	686	369605
617	298992	652	333875	687	370683
618	299962	653	334900	688	371763
619	300933	654	335927	689	372845
620	301907	655	336955	690	373928
621	302881	656	337985	691	375012
622	303857	657	339016	692	376098
623	304835	658	340049	693	377186
624	305815	659	341083	694	378276
625	306796	660	342119	695	379366
626	307778	661	343156	696	380459
627	308762	662	344196	697	381553
628	309748	663	345236	698	382649
629	310735	664	346278	699	383746
630	311724	665	347322	700	384845
631	312714	666	348368	701	385945
632	313706	667	349415	702	387047
633	314700	668	350463	703	388150
634	315695	669	351513	704	389255
635	316692	670	352565	705	390362
636	317690	671	353618	706	391470
637	318690	672	354673	707	392580
638	319691	673	355729	708	393691
639	320694	674	356787	709	394804
640	321699	675	357847	710	395919
641	322705	676	358908	711	397035
642	323712	677	359970	712	398152
643	324722	678	361034	713	399272
644	325732	679	362100	714	400392
645	326745	680	363168	715	401515
646	327759	681	364237	716	402639
647	328774	682	365307	717	403764
648	329791	683	366379	718	404891
649	330810	684	367453	719	406020
650	331830	685	368528	720	407150

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
721	408282	756	448883	791	491408
722	409415	757	450071	792	492651
723	410550	758	451261	793	493896
724	411686	759	452452	794	495143
725	412824	760	453645	795	496391
726	413964	761	454840	796	497640
727	415105	762	456036	797	498891
728	416248	763	457234	798	500144
729	417392	764	458433	799	501398
730	418538	765	459634	800	502654
731	419686	766	460837	801	503912
732	420835	767	462041	802	505171
733	421985	768	463246	803	506431
734	423137	769	464453	804	507693
735	424491	770	465662	805	508957
736	425447	771	466872	806	510222
737	426603	772	468084	807	511489
738	427762	773	469298	808	512758
739	428922	774	470513	809	514028
740	430084	775	471729	810	515299
741	431247	776	472947	811	516572
742	432411	777	474167	812	517847
743	433578	778	475388	813	519123
744	434746	779	476611	814	520401
745	435915	780	477836	815	522681
746	437086	781	479062	816	522962
747	438259	782	480289	817	524244
748	439433	783	481518	818	525528
749	440609	784	482749	819	526814
750	441786	785	483981	820	528101
751	442965	786	485215	821	529390
752	444145	787	486451	822	530680
753	445327	788	487688	823	531972
754	446511	789	487926	824	533266
755	447696	790	490166	825	534561

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
826	535858	861	582232	896	630530
827	537156	862	583585	897	631938
828	538456	863	584940	898	633348
829	539757	864	586296	899	634759
830	541060	865	587654	900	636172
831	542365	866	589014	901	637587
832	543671	867	590375	902	639003
833	544979	868	591737	903	640420
834	546288	869	593102	904	641839
835	547599	870	594467	905	643260
836	548911	871	595835	906	644683
837	550225	872	597204	907	646107
838	551541	873	598574	908	647532
839	552858	874	599946	909	648959
840	554176	875	601320	910	650388
841	555497	876	602695	911	651818
842	556819	877	604072	912	653250
843	558142	878	605450	913	654683
844	559467	879	606830	914	656118
845	560793	880	608212	915	657554
846	562122	881	609595	916	658993
847	563451	882	610980	917	660432
848	564782	883	612366	918	661873
849	566115	884	613754	919	663316
850	567450	885	615143	920	664761
851	568786	886	616534	921	666206
852	570123	887	617926	922	667654
853	571462	888	619321	923	669103
854	572803	889	620716	924	670554
855	574145	890	622113	925	672006
856	575489	891	623512	926	673460
857	576834	892	624913	927	674915
858	578181	893	626314	928	676372
859	579530	894	627718	929	677830
860	580880	895	629123	930	679290

Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.	Durchmesser.	Fläche.
931	680752	955	716302	979	752757
932	682215	956	717803	980	754296
933	683680	957	719306	981	755836
934	685146	958	720810	982	757378
935	686614	959	722315	983	758921
936	688084	960	723822	984	760466
937	689555	961	725311	985	762012
938	691027	962	726842	986	763560
939	692502	963	728353	987	765110
940	693977	964	729867	988	766661
941	695455	965	731382	989	768214
942	696934	966	732899	990	769768
943	698414	967	734417	991	771324
944	699896	968	735936	992	772882
945	701380	969	737458	993	774441
946	702865	970	738981	994	776001
947	704352	971	740505	995	777563
948	705840	972	742031	996	779127
949	707330	973	743559	997	780692
950	708821	974	745088	998	782259
951	710314	975	746619	999	783828
952	711809	976	748151	1000	785398
953	713305	977	749685		
954	714803	978	751220		

C) Berechnung der Linien und Flächen bei einzelnen Theilen des Kreises.

Es sei der Radius des Kreises $= r$
ein Winkel am Mittelpunkte in Graden ausgedrückt $= \varphi$
die zu diesem Winkel gehörige Sehne $= a$
deren perpendiculärer Abstand vom Mittelpunkte $= m$
der korrespondirende Kreisbogen $= b$
der Pfeil des Abschnittes $= f$

die Fläche des Kreisausschnittes (Sectors) $= T$
die Fläche des Kreisabschnittes (Segments) $= S$
es werde ferner der Winkel von 206264 Secunden, bei welchem der Bogen dem Radius gleich ist, ausgedrückt durch $= \mu$

Gegeben: Gesucht:

1. r, φ; $b = \frac{\pi\varphi}{180^0}.r = \frac{\varphi r}{\mu}$

2. a, φ; $b = \frac{\pi\varphi}{360^0 \sin\frac{1}{2}\varphi}.a = \frac{\varphi a}{2\mu \sin\frac{1}{2}\varphi}$

3. m, φ; $b = \frac{\pi\varphi}{180^0 \cos\frac{1}{2}\varphi}.m = \frac{\varphi m}{\mu \cos\frac{1}{2}\varphi}$

4. f, φ; $b = \frac{\pi\varphi}{180^0 (1 - \cos\frac{1}{2}\varphi)}.f = \frac{\varphi f}{2\mu \sin^2\frac{1}{4}\varphi}$

5. r, a; $b = \frac{\pi r}{90^0}.\operatorname{arc} \sin\frac{a}{2r} = \frac{2r}{\mu}.\operatorname{arc} \sin\frac{a}{2r}$

6. r, m; $b = \frac{\pi r}{90^0}.\operatorname{arc} \cos\frac{m}{r} = \frac{2r}{\mu}.\operatorname{arc} \cos\frac{m}{r}$

7. r, f; $b = \frac{\pi r}{90^0}.\operatorname{arc} \cos\frac{r-f}{f} = \frac{2r}{\mu}.\operatorname{arc} \cos\frac{r-f}{f}$

8. a, m; $b = \frac{\pi}{90^0}.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+m^2)}.\operatorname{arc} \cos\frac{m}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+m^2)}} =$
$= \frac{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+m^2)}}{\mu}.\operatorname{arc} \cos\frac{m}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+m^2)}}$

9. a, f; $b = \frac{\pi}{90^0}.\frac{a^2+4f^2}{8f}.\operatorname{arc} \sin\frac{4af}{a^2+4f^2} = \frac{a^2+4f^2}{4\mu f}.\operatorname{arc} \sin\frac{4af}{a^2+4f^2}$

10. T, r; $b = \frac{2T}{r}$

11. r, b; $\varphi = \frac{180^0.b}{\pi.r} = \frac{\mu b}{r}$

12. r, a; $\varphi = 2 \operatorname{arc} \sin\frac{a}{2r}$

13. r, m; $\varphi = 2 \operatorname{arc} \cos\frac{m}{r}$

14. r, f; $\varphi = 2 \operatorname{arc} \cos\frac{r-f}{f}$

15. r, m; $a = 2\sqrt{(r^2 - m^2)}$

16. r, f; $a = 2\sqrt{(2rf - f^2)}$

17. φ, b; $a = \frac{360^\circ . \sin\frac{1}{2}\varphi . b}{\pi\varphi} = \frac{2\mu . b \sin\frac{1}{2}\varphi}{\varphi}$

18. φ, r; $a = 2r \sin\frac{1}{2}\varphi$

19. φ, m; $a = 2m\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$

20. φ, f; $a = 2f \cot\frac{1}{4}\varphi$

21. φ, T; $a = \sin\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\left(\frac{1440^\circ . T}{\pi\varphi}\right)} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\frac{2\mu T}{\varphi}}$

22. φ, S; $a = \sin\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\left(\frac{1440^\circ . S}{\pi\varphi - 180^\circ \sin\varphi}\right)} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi . \sqrt{\left(\frac{2\mu S}{\varphi - \mu\sin\varphi}\right)}$

23. b, T; $r = \frac{2T}{b}$

24. a, m; $r = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + m^2)}$

25. a, f; $r = \frac{a^2 + 4f^2}{8f}$

26. φ, b; $r = \frac{180^\circ . b}{\pi\varphi} = \frac{\mu b}{\varphi}$

27. φ, a; $r = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}$

28. φ, m; $r = \frac{m}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$

29. φ, f; $r = \frac{f}{1 - \cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{f}{2\sin^2\frac{1}{4}\varphi}$

30. φ, T; $r = \sqrt{\left(\frac{360^\circ . T}{\pi\varphi}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu T}{\varphi}}$

31. φ, S; $r = \sqrt{\left(\frac{360^\circ . S}{\pi\varphi - 180^\circ \sin\varphi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2\mu S}{\varphi - \mu\sin\varphi}\right)}$

32. a, r; $m = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

33. a, f; $m = \frac{a^2 - 4f^2}{8f}$

34. φ, b; $m = \frac{180^\circ . \cos\frac{1}{2}\varphi . b}{\pi\varphi} = \frac{b\mu\cos\frac{1}{2}\varphi}{\varphi}$

35. φ, a; $m = \frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}\varphi$

36. φ, r; $m = r \cos \frac{1}{2}\varphi$

37. φ, f; $m = \frac{f \cos \frac{1}{2}\varphi}{1 - \cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{f. \cos \frac{1}{2}\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{4}\varphi}$

38. φ, T; $m = \cos \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{360^\circ . T}{\pi\varphi}\right)} = \cos \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\frac{2\mu T}{\varphi}}$

39. φ, S; $m = \cos \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{180^\circ . 2S}{\pi\varphi - 180^\circ \sin\varphi}\right)} = \cos \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{2\mu S}{\varphi - \mu \sin\varphi}\right)}$

40. a, r; $f = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$

41. a, m; $f = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + m^2)} - m$

42. φ, b; $f = \frac{180^\circ (1 - \cos \frac{1}{2}\varphi)}{\pi\varphi} = \frac{360^\circ \sin^2 \frac{1}{4}\varphi}{\pi\varphi} = \frac{2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{\varphi}$

43. φ, a; $f = \frac{1}{2} a \tang \frac{1}{4}\varphi$

44. φ, r; $f = r (1 - \cos \frac{1}{2}\varphi) = 2 r \sin^2 \frac{1}{4}\varphi$

45. φ, m; $f = \frac{m (1 - \cos \frac{1}{2}\varphi)}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{2 m \sin^2 \frac{1}{4}\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi}$

46. φ, T; $f = \sin \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{360^\circ . T}{\pi\varphi}\right)} = \sin \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\frac{2\mu T}{\varphi}}$

47. φ, S; $f = \sin \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{360^\circ . S}{\pi\varphi - 180^\circ \sin\varphi}\right)} = \sin \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\left(\frac{2\mu S}{\varphi - \mu \sin\varphi}\right)}$

48. b, r; $T = \frac{1}{2} b r$

49. φ, r; $T = \frac{\pi\varphi}{360^\circ} . r^2 = \frac{\varphi r^2}{2\mu}$

50. φ, a; $T = \frac{\pi\varphi}{1440^\circ . \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} . a^2 = \frac{\varphi}{8\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}$

51. φ, m; $T = \frac{\pi\varphi}{360^\circ . \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} . m^2 = \frac{\varphi}{2\mu \cos^2 \frac{1}{2}\varphi}$

52. φ, f; $T = \frac{\pi\varphi}{360^\circ . \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} . f^2 = \frac{\varphi}{2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}$

53. r, a; $T = \text{arc} \sin \frac{a}{2r} . \frac{r^2\pi}{180^\circ} = \frac{r^2}{\mu} . \text{arc} \sin \frac{a}{2r}$

54. r, m; $T = \text{arc} \sin \frac{\sqrt{(r^2 - m^2)}}{r} . \frac{r^2\pi}{180^\circ} = \frac{r^2}{\mu} . \text{arc} \sin \frac{\sqrt{(r^2 - m^2)}}{r}$

55. r, f; $T = \text{arc} \sin \frac{\sqrt{(2rf - f^2)}}{r} . \frac{r^2\pi}{180^\circ} = \frac{r^2}{\mu} . \text{arc} \sin \frac{\sqrt{(2rf - f^2)}}{r}$

56. a, f; $T = arc\,sin\frac{4af}{a^2+4f^2}\cdot\frac{(a^2+4f^2)^2\pi}{64f^2.180^0} = \left(\frac{a^2+4f^2}{8f}\right)^2\cdot\frac{1}{\mu}\cdot arc\,sin\frac{4af}{a^2+4f^2}$

57. φ, a, r; $S = \frac{r^2\pi\varphi}{360^0} - \frac{a\sqrt{(4r^2-a^2)}}{4}$

58. φ, a, f; $S = \frac{\pi\varphi}{1440^0}\left(f+\frac{a^2}{4f}\right)^2 - \frac{a(a+2f).(a-2f)}{16f}$

59. b, a, r; $S = \frac{1}{2}br - \frac{1}{4}a\sqrt{(4r^2-a^2)}$

60. φ, r; $S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180^0} - sin\,\varphi\right) = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\varphi}{\mu} - sin\,\varphi\right)$

61. φ, a; $S = a^2\left(\frac{\pi\varphi}{1440^0\,sin^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{4}\,cot\,\frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{1}{4}a^2\left(\frac{\varphi}{2\mu} - cot\,\frac{1}{2}\varphi\right)$

62. φ, m; $S = \frac{1}{2}m^2\left(\frac{\pi\varphi - 180^0\,sin\,\varphi}{180^0\,cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right) = \frac{1}{2}m^2\left(\frac{\varphi - \mu\,sin\,\varphi}{\mu\,cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)$

63. φ, f; $S = \frac{1}{2}f^2\left(\frac{\pi\varphi - 180^0\,sin\,\varphi}{180^0\,sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right) = \frac{1}{2}f^2\left(\frac{\varphi - \mu\,sin\,\varphi}{\mu\,sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right)$

64. r, a; $S = \frac{r^2\pi}{180^0}\cdot arc\,sin\frac{a}{2r} - \frac{1}{4}a\sqrt{(4r^2-a^2)} =$

$= \frac{r^2}{\mu}\cdot arc\,sin\frac{a}{2r} - \frac{1}{4}a\sqrt{(4r^2-a^2)}$

65. r, m; $S = \frac{r^2\pi}{180^0}\cdot arc\,sin\frac{\sqrt{(r^2-m^2)}}{r} - m\sqrt{(r^2-m^2)} =$

$= \frac{r^2}{\mu}\cdot arc\,sin\frac{\sqrt{(r^2-m^2)}}{r} - m\sqrt{(r^2-m^2)}$

66. r, f; $S = \frac{r^2\pi}{180^0}\cdot arc\,sin\frac{\sqrt{(2rf-f^2)}}{f} - (r-f)\sqrt{(2rf-f^2)} =$

$= \frac{r^2}{\mu}\cdot arc\,sin\frac{\sqrt{(2rf-f^2)}}{f} - (r-f)\sqrt{(2rf-f^2)}$

67. a, f; $S = \left(\frac{a^2+4f^2}{8f}\right)^2\cdot\frac{\pi}{180^0}\cdot arc\,sin\frac{4af}{a^2+4f^2} - \frac{a(a^2-4f^2)}{16f} =$

$= \left(\frac{a^2+4f^2}{8f}\right)^2\cdot\frac{1}{\mu}\,arc\,sin\frac{4af}{a^2+4f^2} - \frac{a(a^2-4f^2)}{16f}$

Anmerkung. Wenn der gegebene Mittelpunktswinkel φ neben den Graden auch Minuten, Secunden u. s. w. enthält, so ist es nothwendig, diese Minuten, Secunden u. s. w. zuvor als Decimalbruch eines Grades auszudrücken, oder den ganzen Winkel φ in Minuten, Secunden u. s. w. zu verwandeln. In letzterem Falle müssen dann in allen Formeln, welche Functionen von φ enthalten, die Zahlen 1440°, 360°, 180°, 90° zuvor durch Multiplication mit 60 oder 3600 u. s. w. gleichfalls in Minuten oder Secunden verwandelt werden.

Bei der Anwendung der Formeln, welche den Hülfswinkel μ enthalten, ist gleichfalls zu bemerken:

dafs derselbe zu 57°, 295.... anzunehmen ist, sobald man die Minuten, Secunden u. s. w. des Winkels φ als Decimalbruch eines Grades ausgedrückt hat;

dafs hingegen derselbe zu 206264″ angenommen wird, sobald der ganze Winkel φ zuvor in Secunden verwandelt worden ist.

Zusatz 1.

Tafel für Kreisabschnitte.

Zu leichter Berechnung der Kreissegmente dient folgende Tafel, zu deren Gebrauch die am Schlusse beigefügte Anmerkung Anleitung giebt.

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
0	0,0000000	22	0,0055030	44	0,0154600
1	0,0000537	23	0,0058806	45	0,0159851
2	0,0001518	24	0,0062663	46	0,0165158
3	0,0002787	25	0,0066600	47	0,0170520
4	0,0004290	26	0,0070614	48	0,0175937
5	0,0005993	27	0,0074704	49	0,0181407
6	0,0007879	28	0,0078869	50	0,0186930
7	0,0009922	29	0,0083106	51	0,0192506
8	0,0012118	30	0,0087414	52	0,0198135
9	0,0014456	31	0,0091793	53	0,0203814
10	0,0016926	32	0,0096241	54	0,0209544
11	0,0019521	33	0,0100756	55	0,0215325
12	0,0022236	34	0,0105339	56	0,0221155
13	0,0025065	35	0,0109986	57	0,0227034
14	0,0028003	36	0,0114698	58	0,0232963
15	0,0031047	37	0,0119473	59	0,0238939
16	0,0034193	38	0,0124311	60	0,0244963
17	0,0037436	39	0,0129211	61	0,0251034
18	0,0040775	40	0,0134171	62	0,0257151
19	0,0044207	41	0,0139190	63	0,0263316
20	0,0047728	42	0,0144269	64	0,0269525
21	0,0051336	43	0,0149406	65	0,0275781

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
66	0,0282081	99	0,0512818	132	0,0781117
67	0,0288425	100	0,0520440	133	0,0789751
68	0,0294814	101	0,0528096	134	0,0798412
69	0,0301246	102	0,0535787	135	0,0807100
70	0,0307722	103	0,0543510	136	0,0815816
71	0,0314241	104	0,0551267	137	0,0824558
72	0,0320802	105	0,0559057	138	0,0833328
73	0,0327405	106	0,0566880	139	0,0842124
74	0,0334051	107	0,0574735	140	0,0850946
75	0,0340737	108	0,0582623	141	0,0859795
76	0,0347465	109	0,0590542	142	0,0868671
77	0,0354233	110	0,0598494	143	0,0877572
78	0,0361042	111	0,0606478	144	0,0886500
79	0,0367891	112	0,0614493	145	0,0895453
80	0,0374780	113	0,0622539	146	0,0904432
81	0,0381708	114	0,0630617	147	0,0913437
82	0,0388675	115	0,0638725	148	0,0922467
83	0,0395681	116	0,0646864	149	0,0931522
84	0,0402725	117	0,0655034	150	0,0940602
85	0,0409808	118	0,0663234	151	0,0949707
86	0,0416929	119	0,0671464	152	0,0958837
87	0,0424086	120	0,0679724	153	0,0967992
88	0,0431282	121	0,0688014	154	0,0977171
89	0,0438515	122	0,0696334	155	0,0986375
90	0,0445784	123	0,0704683	156	0,0995603
91	0,0453090	124	0,0713061	157	0,1004855
92	0,0460432	125	0,0721468	158	0,1014131
93	0,0467810	126	0,0729904	159	0,1023431
94	0,0475223	127	0,0738369	160	0,1032755
95	0,0482672	128	0,0746826	161	0,1042102
96	0,0490157	129	0,0755384	162	0,1051473
97	0,0497676	130	0,0763934	163	0,1060867
98	0,0505230	131	0,0772512	164	0,1070284

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
165	0,1079725	198	0,1403451	231	0,1748251
166	0,1089187	199	0,1413609	232	0,1758992
167	0,1098675	200	0,1423786	233	0,1769749
168	0,1108183	201	0,1433980	234	0,1780522
169	0,1117716	202	0,1444195	235	0,1791312
170	0,1127270	203	0,1454428	236	0,1802116
171	0,1136846	204	0,1464680	237	0,1812938
172	0,1146445	205	0,1474951	238	0,1823774
173	0,1156066	206	0,1485241	239	0,1834626
174	0,1165709	207	0,1495549	240	0,1845494
175	0,1175374	208	0,1505875	241	0,1856377
176	0,1185061	209	0,1516220	242	0,1867276
177	0,1194769	210	0,1526583	243	0,1878190
178	0,1204499	211	0,1536964	244	0,1889119
179	0,1214250	212	0,1547363	245	0,1900064
180	0,1224023	213	0,1557780	246	0,1911023
181	0,1233817	214	0,1568215	247	0,1921998
182	0,1243632	215	0,1578667	248	0,1932987
183	0,1253468	216	0,1589138	249	0,1943992
184	0,1263324	217	0,1509626	250	0,1955011
185	0,1273302	218	0,1610131	251	0,1966045
186	0,1283100	219	0,1620654	252	0,1977094
187	0,1293019	220	0,1631194	253	0,1988157
188	0,1302958	221	0,1641751	254	0,1999234
189	0,1312918	222	0,1652326	255	0,2010326
190	0,1322897	223	0,1662917	256	0,2021432
191	0,1332897	224	0,1673525	257	0,2032553
192	0,1342917	225	0,1684151	258	0,2043688
193	0,1352957	226	0,1694793	259	0,2054836
194	0,1363017	227	0,1705451	260	0,2065999
195	0,1373096	228	0,1716127	261	0,2077176
196	0,1383195	229	0,1726818	262	0,2088366
197	0,1393314	230	0,1737527	263	0,2099571

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
264	0,2110789	297	0,2488200	330	0,2877950
265	0,2122020	298	0,2499841	331	0,2889929
266	0,2133266	299	0,2511494	332	0,2901916
267	0,2144524	300	0,2523158	333	0,2913913
268	0,2155796	301	0,2534833	334	0,2925919
269	0,2167082	302	0,2546519	335	0,2937934
270	0,2178381	303	0,2558216	336	0,2949957
271	0,2189692	304	0,2569924	337	0,2961990
272	0,2201017	305	0,2581643	338	0,2974031
273	0,2212356	306	0,2593372	339	0,2986081
274	0,2223707	307	0,2605112	340	0,2998139
275	0,2235071	308	0,2616863	341	0,3010206
276	0,2246447	309	0,2628625	342	0,3022282
277	0,2257837	310	0,2640397	343	0,3034366
278	0,2269239	311	0,2652179	344	0,3046459
279	0,2280654	312	0,2663972	345	0,3058560
280	0,2292081	313	0,2675776	346	0,3070669
281	0,2303521	314	0,2687589	347	0,3082787
282	0,2314974	315	0,2699413	348	0,3094913
283	0,2326438	316	0,2711247	349	0,3107046
284	0,2337915	317	0,2723091	350	0,3119188
285	0,2349404	318	0,2734945	351	0,3131338
286	0,2360906	319	0,2746809	352	0,3143496
287	0,2372419	320	0,2758682	353	0,3155662
288	0,2383944	321	0,2770566	354	0,3167835
289	0,2395481	322	0,2782459	355	0,3180017
290	0,2407030	323	0,2794362	356	0,3192206
291	0,2418591	324	0,2806275	357	0,3204403
292	0,2430164	325	0,2818197	358	0,3216607
293	0,2441748	326	0,2830129	359	0,3228820
294	0,2453344	327	0,2842070	360	0,3241038
295	0,2464951	328	0,2854021	361	0,3253265
296	0,2476570	329	0,2865981	362	0,3265499

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
363	0,3277741	396	0,3685442	429	0,4099047
364	0,3289990	397	0,3697899	430	0,4111652
365	0,3302245	398	0,3710361	431	0,4124261
366	0,3314509	399	0,3722828	432	0,4136874
367	0,3326779	400	0,3735300	433	0,4149489
368	0,3339056	401	0,3747778	434	0,4162109
369	0,3351340	402	0,3760261	435	0,4174731
370	0,3363631	403	0,3772749	436	0,4187357
371	0,3375929	404	0,3785242	437	0,4199987
372	0,3388234	405	0,3797740	438	0,4212619
373	0,3400545	406	0,3810243	439	0,4225255
374	0,3412863	407	0,3822751	440	0,4237894
375	0,3425188	408	0,3835263	441	0,4250536
376	0,3437520	409	0,3847781	442	0,4263181
377	0,3449857	410	0,3860303	443	0,4275829
378	0,3462202	411	0,3872830	444	0,4288479
379	0,3474553	412	0,3885361	445	0,4301133
380	0,3486910	413	0,3897897	446	0,4313790
381	0,3499273	414	0,3910437	447	0,4326449
382	0,3511643	415	0,3922982	448	0,4339111
383	0,3524019	416	0,3935531	449	0,4351776
384	0,3536401	417	0,3948085	450	0,4364443
385	0,3548789	418	0,3960643	451	0,4377113
386	0,3561183	419	0,3973205	452	0,4389785
387	0,3573583	420	0,3985771	453	0,4402460
388	0,3585989	421	0,3998342	454	0,4415137
389	0,3598400	422	0,4010916	455	0,4427817
390	0,3610818	423	0,4023495	456	0,4440499
391	0,3623241	424	0,4036077	457	0,4453183
392	0,3635670	425	0,4048664	458	0,4465869
393	0,3648105	426	0,4061254	459	0,4478557
394	0,3660545	427	0,4073848	460	0,4491248
395	0,3672991	428	0,4086446	461	0,4503941

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
462	0,4516635	495	0,4936339	528	0,5356321
463	0,4529332	496	0,4949071	529	0,5369032
464	0,4542030	497	0,4961803	530	0,5381743
465	0,4554730	498	0,4974535	531	0,5394451
466	0,4567432	499	0,4987268	532	0,5407158
467	0,4580136	500	0,5000000	533	0,5419864
468	0,4592842	501	0,5012732	534	0,5432568
469	0,4605549	502	0,5025465	535	0,5445270
470	0,4618257	503	0,5038197	536	0,5457970
471	0,4630968	504	0,5050929	537	0,5470668
472	0,4643679	505	0,5063661	538	0,5483365
473	0,4656392	506	0,5076393	539	0,5496059
474	0,4669107	507	0,5089124	540	0,5508752
475	0,4681823	508	0,5101855	541	0,5521443
476	0,4694540	509	0,5114585	542	0,5534131
477	0,4707258	510	0,5127315	543	0,5546817
478	0,4719978	511	0,5140045	544	0,5559501
479	0,4732698	512	0,5152774	545	0,5572183
480	0,4745420	513	0,5165502	546	0,5584863
481	0,4758143	514	0,5178230	547	0,5597540
482	0,4770866	515	0,5190957	548	0,5610215
483	0,4783591	516	0,5203784	549	0,5622887
484	0,4796316	517	0,5216409	550	0,5635557
485	0,4809043	518	0,5229134	551	0,5648224
486	0,4821770	519	0,5241857	552	0,5660889
487	0,4834498	520	0,5254580	553	0,5673551
488	0,4847226	521	0,5267302	554	0,5686210
489	0,4859955	522	0,5280022	555	0,5698867
490	0,4872685	523	0,5292742	556	0,5711521
491	0,4885415	524	0,5305460	557	0,5724171
492	0,4898145	525	0,5318177	558	0,5736819
493	0,4910876	526	0,5330893	559	0,5749464
494	0,4923607	527	0,5343608	560	0,5762106

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
561	0,5774745	594	0,6189757	627	0,6599455
562	0,5787381	595	0,6202260	628	0,6611766
563	0,5800013	596	0,6214758	629	0,6624071
564	0,5812643	597	0,6227251	630	0,6636369
565	0,5825269	598	0,6239739	631	0,6648660
566	0,5837891	599	0,6252222	632	0,6660944
567	0,5850511	600	0,6264700	633	0,6673221
568	0,5863126	601	0,6277172	634	0,6685491
569	0,5875739	602	0,6289639	635	0,6697755
570	0,5888348	603	0,6302101	636	0,6710010
571	0,5900953	604	0,6314558	637	0,6722259
572	0,5913554	605	0,6327009	638	0,6734501
573	0,5926152	606	0,6339455	639	0,6746735
574	0,5938746	607	0,6351895	640	0,6758962
575	0,5951336	608	0,6364330	641	0,6771180
576	0,5963923	609	0,6376759	642	0,6783393
577	0,5976505	610	0,6389182	643	0,6795597
578	0,5989084	611	0,6401600	644	0,6807794
579	0,6001658	612	0,6414011	645	0,6819983
580	0,6014229	613	0,6426417	646	0,6832165
581	0,6026795	614	0,6438817	647	0,6844338
582	0,6039357	615	0,6451211	648	0,6856504
583	0,6051915	616	0,6463599	649	0,6868662
584	0,6064469	617	0,6475981	650	0,6880812
585	0,6077018	618	0,6488357	651	0,6892954
586	0,6089562	619	0,6500727	652	0,6905087
587	0,6102103	620	0,6513090	653	0,6917213
588	0,6114639	621	0,6525447	654	0,6929331
589	0,6127170	622	0,6537798	655	0,6941440
590	0,6139697	623	0,6550143	656	0,6953541
591	0,6152219	624	0,6562480	657	0,6965634
592	0,6164737	625	0,6574812	658	0,6977718
593	0,6177249	626	0,6587137	659	0,6989794

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
660	0,7001861	693	0,7394888	726	0,7776293
661	0,7013919	694	0,7406628	727	0,7787644
662	0,7025969	695	0,7418357	728	0,7798983
663	0,7038010	696	0,7430076	729	0,7810308
664	0,7050043	697	0,7441784	730	0,7821619
665	0,7062066	698	0,7453481	731	0,7832918
666	0,7074081	699	0,7465167	732	0,7844204
667	0,7086087	700	0,7476842	733	0,7855476
668	0,7098084	701	0,7488506	734	0,7866734
669	0,7110071	702	0,7500159	735	0,7877980
670	0,7122050	703	0,7511800	736	0,7889211
671	0,7134019	704	0,7523430	737	0,7900429
672	0,7145979	705	0,7535049	738	0,7911634
673	0,7157930	706	0,7546656	739	0,7922824
674	0,7169871	707	0,7558252	740	0,7934001
675	0,7181803	708	0,7569836	741	0,7945164
676	0,7193725	709	0,7581409	742	0,7956312
677	0,7205638	710	0,7592970	743	0,7967447
678	0,7217541	711	0,7604519	744	0,7978568
679	0,7229433	712	0,7616056	745	0,7989674
680	0,7241318	713	0,7627581	746	0,8000766
681	0,7253191	714	0,7639094	747	0,8011843
682	0,7265055	715	0,7650596	748	0,8022906
683	0,7276909	716	0,7662085	749	0,8033955
684	0,7288753	717	0,7673562	750	0,8044989
685	0,7300587	718	0,7685026	751	0,8056008
686	0,7312411	719	0,7696479	752	0,8067013
687	0,7324224	720	0,7707919	753	0,8078002
688	0,7336028	721	0,7719346	754	0,8088977
689	0,7347821	722	0,7730761	755	0,8099936
690	0,7359603	723	0,7742163	756	0,8110881
691	0,7371375	724	0,7753553	757	0,8121810
692	0,7383137	725	0,7764929	758	0,8132724

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
759	0,8143623	792	0,8494125	825	0,8824626
760	0,8154506	793	0,8504451	826	0,8834291
761	0,8165374	794	0,8514759	827	0,8843934
762	0,8176226	795	0,8525049	828	0,8853555
763	0,8187062	796	0,8535320	829	0,8863154
764	0,8197884	797	0,8545572	830	0,8872730
765	0,8208688	798	0,8555805	831	0,8882284
766	0,8219478	799	0,8566020	832	0,8891817
767	0,8230231	800	0,8576214	833	0,8901325
768	0,8241008	801	0,8586391	834	0,8910813
769	0,8251749	802	0,8596549	835	0,8920275
770	0,8262473	803	0,8606686	836	0,8929716
771	0,8273182	804	0,8616805	837	0,8939133
772	0,8283873	805	0,8626904	838	0,8948527
773	0,8294549	806	0,8636983	839	0,8957898
774	0,8305207	807	0,8647043	840	0,8967245
775	0,8315849	808	0,8657083	841	0,8976569
776	0,8326475	809	0,8667103	842	0,8985869
777	0,8337083	810	0,8677103	843	0,8995145
778	0,8347647	811	0,8687082	844	0,9004397
779	0,8358249	812	0,8697042	845	0,9013625
780	0,8368806	813	0,8706981	846	0,9022829
781	0,8379346	814	0,8716900	847	0,9032008
782	0,8389869	815	0,8726798	848	0,9041163
783	0,8400374	816	0,8736676	849	0,9050293
784	0,8410862	817	0,8746532	850	0,9059398
785	0,8421333	818	0,8756368	851	0,9068478
786	0,8431785	819	0,8766183	852	0,9077533
787	0,8442220	820	0,8775977	853	0,9086563
788	0,8452637	821	0,8785750	854	0,9095568
789	0,8463036	822	0,8795501	855	0,9104547
790	0,8473417	823	0,8805231	856	0,9113500
791	0,8483780	824	0,8814939	857	0,9122428

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
858	0,9131329	891	0,9409458	924	0,9652535
859	0,9140205	892	0,9417377	925	0,9659263
860	0,9149054	893	0,9425265	926	0,9665949
861	0,9157876	894	0,9433120	927	0,9672595
862	0,9166672	895	0,9440943	928	0,9679198
863	0,9175442	896	0,9448733	929	0,9685759
864	0,9184184	897	0,9456490	930	0,9692278
865	0,9192900	898	0,9464213	931	0,9698754
866	0,9201588	899	0,9471904	932	0,9705186
867	0,9210249	900	0,9479560	933	0,9711575
868	0,9218883	901	0,9487182	934	0,9717919
869	0,9227488	902	0,9494770	935	0,9724219
870	0,9236066	903	0,9502324	936	0,9730475
871	0,9244616	904	0,9509843	937	0,9736684
872	0,9253138	905	0,9517328	938	0,9742849
873	0,9261631	906	0,9524777	939	0,9748966
874	0,9270096	907	0,9532190	940	0,9755037
875	0,2978532	908	0,9539568	941	0,9761061
876	0,9286939	909	0,9546910	942	0,9767037
877	0,9295317	910	0,9554216	943	0,9772966
878	0,9303666	911	0,9561485	944	0,9778845
879	0,9311986	912	0,9568718	945	0,9784675
880	0,9320276	913	0,9575914	946	0,9790456
881	0,9328536	914	0,9583071	947	0,9796186
882	0,9336766	915	0,9590192	948	0,9801865
883	0,9344966	916	0,9597275	949	0,9807494
884	0,9353136	917	0,9604319	950	0,9813070
885	0,9361275	918	0,9611325	951	0,9818593
886	0,9369383	919	0,9618292	952	0,9824063
887	0,9377461	920	0,9625220	953	0,9829480
888	0,9385507	921	0,9632109	954	0,9834842
889	0,9393522	922	0,9638958	955	0,9840149
890	0,9401506	923	0,9645767	956	0,9845400

Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.	Länge des Pfeils.	Fläche des Segments.
957	0,9850594	972	0,9921131	987	0,9974935
958	0,9855731	973	0,9925296	988	0,9977764
959	0,9860810	974	0,9929386	989	0,9980479
960	0,9865829	975	0,9933400	990	0,9983074
961	0,9870789	976	0,9937337	991	0,9985544
962	0,9875689	977	0,9941194	992	0,9987882
963	0,9880527	978	0,9944970	993	0,9990078
964	0,9885302	979	0,9948664	994	0,9992124
965	0,9890014	980	0,9952272	995	0,9994007
966	0,9894661	981	0,9955793	996	0,9995710
967	0,9899244	982	0,9959225	997	0,9997213
968	0,9903759	983	0,9962564	998	0,9998482
969	0,9908207	984	0,9965807	999	0,9999463
970	0,9912586	985	0,9968953		
971	0,9916894	986	0,9971997		

Anmerkung. Der Gebrauch dieser Segmententafel setzt voraus, dafs, aufser dem Durchmesser des Kreises, noch der Pfeil des Segments gegeben sey. Die Tafel selbst ist für einen Durchmesser = 1000 berechnet, dessen Fläche zur Einheit angenommen ist.

Der gegebene Pfeil f wird daher jedesmal mit 1000 multiplicirt und durch den gegebenen Durchmesser d dividirt.

Wird die daraus erhaltene Zahl in der Columne: Länge des Pfeils aufgesucht, so ist die derselben in der Columne: Fläche des Segments correspondirende Zahl der Factor, mit welchem die Fläche eines Kreises von dem Durchmesser d multiplicirt werden mufs, um die wirkliche Fläche des Segments für den Pfeil f zu erhalten.

Oder wenn $\frac{1000\,f}{d} = m$

die der Zahl m correspondirende Zahl = n

so ist die Fläche des Segments $= n.\frac{d^2}{4}$

Zusatz 2.

Näherungsformeln für Bogen, Ausschnitte und Abschnitte des Kreises.

Wenn der Halbmesser eines Kreises $= r$
eine dem $\angle\ \varphi$ correspondirende Sehne desselben $= a$
der zu derselben gehörige Bogen $= b$
der Pfeil der Sehne $= f$

ein Perpendikel von dem Endpunkte des Halbmessers auf den, den ∠ φ einschliefsenden anderen Halbmesser (d. h. der Sinus des ∠ φ für den Radius = r) = q
die Fläche des Kreisausschnitts = T
— des Kreisabschnitts = S

so finden folgende einfache Formeln statt, die eine in den meisten Fällen hinreichend genaue Annäherung an die wahren Werthe gewähren.

Gegeben:	Gesucht:
1. a, q;	$b = \frac{4a - q}{3}$
2. a, r;	$b = \frac{a.(8r - \sqrt{(4r^2 - a^2)})}{6r}$
3. b, q;	$a = \frac{3b + q}{4}$
4. a, b;	$q = 4a - 3b$
5. r, a, q;	$T = \frac{r(4a - q)}{6}$
6. r, a;	$T = \frac{a[8r - \sqrt{(4r^2 - a^2)}]}{12}$
7. r, a, q;	$S = \frac{2}{3} r(a - q)$
8. r, a;	$S = \frac{1}{3} a[2r - \sqrt{(4r^2 - a^2)}]$
9. a, f;	$S = \frac{2}{3} a.f$

Sämmtliche Formeln setzen, um brauchbar zu seyn, voraus, dafs der ∠ φ kleiner als 90° sey.

Zusatz 3.

Parallele Sehnen im Kreise.

Wenn in einem Kreise zwei parallele Sehnen a und b nebst deren senkrechtem Abstande c gegeben sind, so wird der Halbmesser dieses Kreises durch folgende Formel ausgedrückt:

$$r = \frac{\sqrt{((\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} a^2 - c^2)^2 + b^2 c^2)}}{2c}$$

Oder wenn der Halbmesser r und die beiden Sehnen a und b gegeben sind, so ist deren Abstand:

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{(8r^2 - b^2 - a^2 + 2\sqrt{a^2 b^2 - 4r^2(b^2 + a^2 - 4r^2)})}$$

Zweiter Abschnitt.

Formeln zur körperlichen Geometrie.

I. Der Würfel.

Es sei der körperliche Inhalt eines Würfels $= V$
seine Oberfläche $= O$
seine Seite $= a$

Gegeben:	Gesucht:
1. a;	$V = a^3$
2. O;	$V = \frac{O}{6}\sqrt{\frac{O}{6}} = 0{,}0680414 . \sqrt{O^3}$
	$\log V = 0{,}8327732 - 2 + \frac{3 \log O}{2}$
3. a;	$O = 6a^2$
4. V;	$O = 6\sqrt[3]{V^2}$
5. V;	$a = \sqrt[3]{V}$
6. O;	$a = \sqrt{\frac{O}{6}} = 0{,}4082483 . \sqrt{O}$
	$\log a = 0{,}6109244 - 1 + \frac{\log O}{2}$

II. Das Prisma.

A) Das gerade Prisma überhaupt.

Es sei der körperliche Inhalt des geraden Prisma $= V$
seine Seitenfläche $= S$

seine gesammte Oberfläche $= O$
seine Grundfläche $= F$
deren Umfang $= p$
die Höhe des Prisma $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. F, h;	$V = F.h$
2. p, h;	$S = p.h$
3. S, F;	$O = S + 2F$
4. V, h;	$F = \frac{V}{h}$
5. S, h;	$p = \frac{S}{h}$
6. V, F;	$h = \frac{V}{F}$
7. S, p;	$h = \frac{S}{p}$

Zusatz.

Das schiefe Prisma.

Die Formeln 1. 4. und 6. gelten gleichfalls für das schiefe Prisma.

Ist statt der senkrechten Höhe des Prisma eine der Seitenlinien $= m$ bekannt, nebst dem Neigungswinkel $= \varphi$, welchen eine der Seitenflächen gegen die Grundfläche macht, und den ebenen Winkel $= \psi$, den diese Seitenfläche enthält, so wird die senkrechte Höhe ausgedrückt durch:

$$h = m \sin\varphi \sin\psi$$

Ist hingegen eine Seitenlinie m bekannt, ferner die beiden ebenen Winkel α und β, die diese Kante mit den zwei anstofsenden Seiten der Grundfläche macht, nebst dem Winkel γ, den diese beiden Seiten der Grundfläche zwischen sich einschliefsen, so wird die senkrechte Höhe des Prisma ausgedrückt durch:

$$h = 2m \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta).\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\gamma}\right)}$$

Die Formeln 2. 3. 5. und 7. hingegen, haben keinen Bezug auf das schiefe Prisma, in welchem Seitenfläche und Oberfläche nicht durch allgemeine Ausdrücke darzustellen sind.

B) Das rechtwinkliche Parallelepiped.

Es sei der körperliche Inhalt eines rechtwinklichen Parallelepipeds $= V$
seine ganze Oberfläche $= O$
die drei Dimensionen des Parallelepipeds $= a,\ b$ und c

Gegeben:	Gesucht:
1. a, b, c;	$V = abc$
2. O, a, b;	$V = \frac{(O - ab)ab}{2(a+b)}$
3. a, b, c;	$O = 2(ab + ac + bc)$
4. V, a, b;	$O = \frac{2(a+b)V + a^2b^2}{ab}$
5. V, b, c;	$a = \frac{V}{bc}$
6. O, b, c;	$a = \frac{O - bc}{2(b+c)}$
7. V, O, b;	$a = \frac{2V - Ob \mp \sqrt{[(V - Ob - 2b^3)4V + O^2b^2]}}{2b^2}$

C) Das schiefwinkliche Parallelepiped überhaupt.

Es seien die drei Kanten eines Parallelepipeds, die in einer Ecke desselben zusammenstoſsen $= a,\ b$ und c
die drei ebenen Winkel, die von diesen drei Linien unter sich gebildet werden, nach der Reihe $= \alpha,\ \beta$ und γ
der körperliche Inhalt des Parallelepipeds $= V$
die Oberfläche desselben $= O$
die Neigungswinkel der drei in jener Ecke zusammenstoſsenden Gränzflächen, nach der Reihe $= \varphi,\ \psi$ und χ
die beiden Diagonallinien des Körpers $= f$ und g
die Flächen der beiden Diagonalschnitte $= F$ und G
die Neigungswinkel dieser beiden Flächen gegen die Grundfläche $= \delta$ und ε
die Seiten der Diagonalschnitte, welche Diagonalen der Gränzflächen des Körpers sind $= p$ und q

In sämmtlichen Formeln werden $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ als gegeben betrachtet.

Gesucht:

1. $V = 2\,abc\sqrt{[\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)]}$
2. $O = 2\,(ab\sin\alpha + ac\sin\beta + bc\sin\gamma)$
3. $\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}$
4. $\sin\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}$
5. $\sin\tfrac{1}{2}\chi = \sqrt{\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}$
6. $f = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+2ab\cos\alpha+2ac\cos\beta+2bc\cos\gamma)}$
7. $g = \sqrt{(a^2+b^2+c^2+2ab\cos\alpha-2ac\cos\beta-2bc\cos\gamma)}$
8. $F = c\sqrt{[a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\gamma+2ab(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)]}$
9. $G = c\sqrt{[a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\gamma+2ab(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)]}$
10. $\cos\delta = \dfrac{a\cos\gamma-b\cos\beta-\cos\alpha(a\cos\beta-b\cos\gamma)}{\sin\alpha\sqrt{[a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\gamma+2ab(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)]}}$
11. $\cos\varepsilon = \dfrac{\cos\alpha(a\cos\beta+b\cos\gamma)-a\cos\gamma-b\cos\beta}{\sin\alpha\sqrt{[a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2\gamma+2ab(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)]}}$
12. $p = \sqrt{(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}$
13. $q = \sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)}$

D) Der Rhomboeder.

Es sei bei einem von sechs congruenten Rhomben eingeschlossenen Rhomboeder der körperliche Inhalt $= V$

die Oberfläche $= O$

jede der Kanten $= a$

der ebene Winkel der einschliefsenden Rhomben $= \alpha$

der Neigungswinkel der Gränzflächen gegen einander $= \varphi$

die beiden Diagonallinien der Gränzflächen $= p$ und q

die beiden Diagonallinien des Körpers $= f$ und g

die Flächen der Diagonalschnitte $= F$ und G

der ebene Winkel der Diagonalschnitte $= \omega$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, α;	$V = 2a^3\sqrt{\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}a^3}$
2. p, q;	$V = 2q^2\sqrt{(3p^2-q^2)}$

3. a, α; $O = 6a^2 \sin\alpha$

4. p, q; $O = 12pq$

5. α; $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2}\sec\frac{1}{2}\alpha$

6. p, q; $\cos\varphi = \frac{p^2-q^2}{2p^2}$

7. a, α; $f = a\sqrt{(3+6\cos\alpha)}$

8. $g = a\sqrt{(3-2\cos\alpha)}$

9. p, q; $f = \sqrt{(p^2q-3q^2)}$

10. $g = \sqrt{(p^2+5q^2)}$

11. a, α; $F = a^2\sin\frac{1}{2}\alpha . \sqrt{(2+4\cos\alpha)}$

12. $G = a^2\sin\frac{1}{2}\alpha . \sqrt{(2-4\cos\alpha)}$

13. p, q; $F = \sqrt{\left(\frac{6p^2q^2-2q^4}{p^2+q^2}\right)}$

14. $G = \sqrt{\left[\frac{2q^2(3q^4+2p^2q^2-p^4)}{p^2+q^2}\right]}$

15. α; $\cos\omega = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

16. p, q; $\cos\omega = \frac{p^2-q^2}{p\sqrt{(p^2+q^2)}}$

17. a, α; $p = 2a\cos\frac{1}{2}\alpha$

18. $q = 2a\sin\frac{1}{2}\alpha$

19. p, q; $a = \sqrt{(p^2+q^2)}$

20. p, q; $\sin\alpha = \frac{2pq}{p^2+q^2}$

21. $\cos\alpha = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

Anmerkung. Ausführlichere Untersuchungen über diesen, krystallographisch wichtigen, Körper giebt *Hauy Elémens de Minéralogie* 1801.

E) Das schief abgeschnittene Prisma.

Es sei die Grundfläche eines geraden Prisma von n Seiten, durch Transversalen von einem der Winkelpunkte aus in Dreiecke zerlegt, deren Anzahl n — 2 sein wird.

Der Flächeninhalt des ersten dieser Dreiecke sei = A und die drei demselben zugehörigen Kanten des Prisma = a, b und c.

Der Flächeninhalt des zweiten Dreiecks = B und die drei zugehörigen Kanten = a, c und d

Der Flächeninhalt des dritten Dreiecks = C und die drei Kanten = a, d und e u. s. w. so ist:

$$V = \frac{a+b+c}{3}.A + \frac{a+c+d}{3}.B + \frac{a+d+e}{3}.C + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Ist das Prisma zugleich ein schiefes, und der Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche = φ so ist:

$$V = \sin\varphi\left(\frac{a+b+c}{3}.A + \frac{a+c+d}{3}.B + \frac{a+d+e}{3}.C + \ldots \text{ u. s. w.}\right)$$

III. Die Pyramide.

A) Die Pyramide im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf Zahl und Gröfse der Seiten.

Es sei der körperliche Inhalt einer Pyramide = V
deren Grundfläche = F
die perpendiculäre Höhe = h

Gegeben:	Gesucht:
1. F, h;	$V = \frac{1}{3}F.h$
2. V, h;	$F = \frac{3V}{h}$
3. V, F;	$h = \frac{3V}{F}$

Anmerkung. Die Seitenfläche einer Pyramide kann nicht durch eine allgemeine Formel ausgedrückt werden, da die Dreiecke, aus welchen sie zusammengesetzt ist, verschiedene Höhe haben.

B) Die gerade Pyramide.

Es sei der körperliche Inhalt einer geraden Pyramide von n Seiten = V
deren Seitenfläche = S
deren Oberfläche = O
jede Seite der Grundfläche = a

die senkrechte Höhe $= h$
jede Seitenlinie (Kante) der Pyramide $= k$
die ebenen Winkel, welche die Kanten an der Spitze mit einander machen $= \alpha$
die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $= \beta$
die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander $= \gamma$
die Neigungswinkel der Kanten gegen die Grundfläche $= \delta$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, h;	$V = \frac{1}{12} a^2 h \cot \frac{180^\circ}{n} . n$
2. a, k;	$V = \frac{1}{12} a^2 . \frac{\cot \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} . \sqrt{\left(k^2 \sin^2 \frac{180^\circ}{n} - \frac{1}{4} a^2\right)} . n$
3. a, α;	$V = \frac{1}{24} a^3 . \frac{\cot^2 \frac{180^\circ}{n} . \tang \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\left(1 - \cot^2 \frac{180^\circ}{n} . \tang^2 \frac{1}{2}\alpha\right)}} . n$
4. a, β;	$V = \frac{1}{24} a^3 . \tang \beta . \cot^2 \frac{180^\circ}{n} . n$
5. k, α;	$V = \frac{1}{3} k^3 . \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha . \tang \frac{1}{2}\alpha . \cot^2 \frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{\left(1 - \cot^2 \frac{180^\circ}{n} . \tang^2 \frac{1}{2}\alpha\right)}} . n$
6. a, h;	$S = \frac{\frac{1}{2} a \sqrt{\left(h^2 . \sin^2 \frac{180^\circ}{n} + \frac{1}{4} a^2 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right)}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} . n$
7. a, k;	$S = \frac{1}{2} a \sqrt{(k^2 - \frac{1}{4} a^2)} . n$
8. a, α;	$S = \frac{1}{4} a^2 . \cot \frac{1}{2}\alpha . n$
9. a, β;	$S = \frac{1}{4} a^2 \sec \beta . \cot \frac{180^\circ}{n} . n = \frac{a^2 \cot \frac{180^\circ}{n}}{4 \cos \beta} . n$
10. k, α;	$S = \frac{1}{2} k^2 \sin \alpha . n$

11. a, k; $$h = \frac{\sqrt{\left(k^2 \sin^2 . \frac{180^\circ}{n} - \frac{1}{4} a^2\right)}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

12. a, β; $$h = \tfrac{1}{2} a \tang \beta . \cot \frac{180^\circ}{n}$$

13. a, α; $$h = \tfrac{1}{2} a . \sqrt{\left(\cot^2 \tfrac{1}{2} \alpha - \cot^2 \frac{180^\circ}{n}\right)}$$

14. a, δ; $$h = \tfrac{1}{2} a \tang \delta \cosec \frac{180^\circ}{n}$$

15. k, α; $$h = k . \sqrt{\left(\cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha - \cot^2 \frac{180^\circ}{n} . \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha\right)}$$

16. k, β; $$h = k . \frac{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{180^\circ}{n} - \sin^2 \beta\right)}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

17. a, h; $$k = \frac{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{180^\circ}{n} . h^2 + \frac{1}{4} a^2\right)}}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$$

18. a, α; $$k = \frac{\frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = \tfrac{1}{2} a \cosec \tfrac{1}{2} \alpha$$

19. a, β; $$k = \tfrac{1}{2} a . \sqrt{\left(1 + \tang^2 \beta . \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right)}$$

20. a, δ; $$k = \tfrac{1}{2} a \sec \delta . \cosec \frac{180^\circ}{n}$$

21. k, h; $$a = 2 \sin \frac{180^\circ}{n} \sqrt{(k^2 - h^2)}$$

22. k, α; $$a = 2k \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

23. k, β; $$a = \frac{2k}{\sqrt{\left(1 + \tang^2 \beta . \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right)}}$$

24. k, δ; $$a = 2k \cos \delta . \sin \frac{180^\circ}{n}$$

25. a, k; $\cos\beta = \sqrt{\left(\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}a^2} - \frac{\frac{1}{4}a^2}{(k^2-\frac{1}{4}a^2)\sin^2.\frac{180^\circ}{n}}\right)}$

26. a, h; $\cos\beta = \frac{h\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{\left(\sin^2\frac{180^\circ}{n}h^2+\frac{1}{4}a^2\cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)}}$

27. α; $\cos\beta = \cot\frac{180^\circ}{n}.\tang\frac{1}{2}\alpha$

28. δ; $\tang\beta = \frac{\tang\delta}{\cos.\frac{180^\circ}{n}}$

29. a, k; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{2k}$

30. a, h; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{a.\sin\frac{180^\circ}{n}}{2\sqrt{\left(\sin^2\frac{180^\circ}{n}.h^2+\frac{1}{4}a^2\right)}}$

31. β; $\cot\frac{1}{2}\alpha = \tang\beta.\cos\frac{180^\circ}{n}$

32. δ; $\tang\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{\left(\tang^2\delta+\cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)}}$

33. a, k; $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{4k^2}\right)}}$

34. α; $\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

35. β; $\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{\tang\beta}{\sqrt{\left(1+\tang^2\beta\cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)}}$

36. δ; $$\cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin \delta}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$$

37. a, k; $$\sin \delta = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4k^2 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}}\right)}$$

38. h, k; $$\sin \delta = \frac{h}{k}$$

39. β; $$\tang \delta = \tang \beta \,.\, \cos \frac{180^\circ}{n}$$

40. α; $$\tang \delta = \frac{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{180^\circ}{n} - \cos^2 \frac{180^\circ}{n} \,.\, \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha\right)}}{\tang \tfrac{1}{2}\alpha}$$

Anmerkung 1. Der Begriff einer geraden Pyramide ist hier in dem Sinne genommen, dafs die Pyramide gleichseitig sey und eine reguläre Figur zur Grundfläche habe.

2. Die Oberfläche der Pyramide wird aus den Formeln 6 — 10 gefunden, wenn man denselben die Grundfläche hinzufügt. Es ist daher stets:

$$O = S + \tfrac{1}{4} a^2 \cot \frac{180^\circ}{n} \,.\, n$$

C) Die dreiseitige schiefe Pyramide.

Es sei der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide $= V$
deren sechs Kanten $=$ a, b, c, d, e und f
die drei ebenen Winkel, welche drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten a, b und c bilden $= \alpha, \beta, \gamma$

Gegeben: / **Gesucht:**

1. a, b, c; α, β, γ
$$V = \tfrac{1}{3} abc \sqrt{\left[\sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\right]}$$

2. a, b, c; α, β, γ
$$V = \tfrac{1}{6} abc \sqrt{\left[1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right]}$$

3. a, b, c, d, e, f
$$V = \tfrac{1}{12} \sqrt{\left[c^2 d^2 (a^2+b^2+c^2+f^2-c^2-d^2) + a^2 e^2 \,.\, (b^2+c^2+d^2+f^2-a^2-e^2) - b^2 f^2 \,.\, (a^2+c^2+d^2+e^2-b^2-f^2) - a^2 b^2 d^2 - a^2 c^2 f^2 - b^2 c^2 e^2 - d^2 e^2 f^2\right]}$$

Anmerkung. Die den Tetraeder betreffenden Formeln siehe reguläre Körper.

D) Die abgekürzte Pyramide.

a) Abgekürzte Pyramiden, ohne Rücksicht auf die Gestalt der Grundfläche.

Es sei der körperliche Inhalt einer abgekürzten Pyramide $= V$
die Flächeninhalte der beiden Grundflächen $= A$ und B
das Verhältniſs der correspondirenden Seiten in der grösseren und kleineren Grundfläche $= m : n$
die perpendiculäre Höhe der abgekürzten Pyramide $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. A, B, h;	$V = \frac{1}{3}h(A + \sqrt{AB} + B)$
2. A, B, m : n;	$V = \frac{1}{3}AB\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)$
3. V, B, h;	$A = \frac{\sqrt{3Bh(4V - Bh)} - (Bh - 6V)}{2h}$
4. V, B, m : n;	$A = \frac{3V}{B\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)}$
5. V, A, h;	$B = \frac{\sqrt{3Ah(4V - Ah)} + 6V - Ah}{2h}$
6. V, A, m : n;	$B = \frac{3V}{A\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)}$
7. V, A, B;	$h = \frac{3V}{A + \sqrt{AB} + B}$
8. A, B, m : n;	$h = \frac{AB\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right)}{A + \sqrt{AB} + B}$

Anmerkung. Die Seitenfläche einer abgekürzten Pyramide kann nicht durch eine brauchbare allgemeine Formel dargestellt werden, da die Trapeze, aus welchen sie besteht, verschiedene Höhen erhalten.

b) Die abgekürzte gerade Pyramide.

Es sei der körperliche Inhalt einer abgekürzten geraden Pyramide von n Seiten $= V$
deren Seitenfläche $= S$

deren Oberfläche	$= O$
die Seite der gröfseren Grundfläche	$= a$
die Seite der kleineren Grundfläche	$= b$
die perpendiculäre Höhe der abgekürzten Pyramide	$= p$
die Seitenlinie (Kante) der abgekürzten Pyramide	$= q$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, b, p;	$V = \frac{1}{12} p \cdot \cot \frac{180^0}{n} (a^2 + ab + b^2) \cdot n$
2. a, b, q;	$V = \frac{1}{12} \cdot \frac{\cot \frac{180^0}{n}}{\sin \frac{180^0}{n}} \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot \sqrt{\left[q^2 \sin^2 \frac{180^0}{n} - \frac{1}{4}(a-b)^2\right]} \cdot n$
3. a, b, p;	$S = \frac{1}{2} \frac{a+b}{\sin \frac{180^0}{n}} \cdot \sqrt{\left[p^2 \sin^2 \frac{180^0}{n} + \frac{1}{4}(a-b)^2 \cos^2 \frac{180^0}{n}\right]} \cdot n$
4. a, b, q;	$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \sqrt{\left[q^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2\right]}$
5. a, b, q;	$p = \frac{\sqrt{\left[q^2 \sin^2 \frac{180^0}{n} - \frac{1}{4}(a-b)^2\right]}}{\sin \frac{180^0}{n}}$
6. a, b, p;	$q = \frac{\sqrt{\left[p^2 \sin^2 \frac{180^0}{n} + \frac{1}{4}(a-b)^2\right]}}{\sin \frac{180^0}{n}}$

Zusatz 1.

Neigungswinkel.

Die Untersuchungen über die Neigungswinkel der Flächen und Kanten führen auf dieselben Formeln, wie die in B) 25 — 40 gegebenen. Nur ist in jenen Formeln stets:

für h dessen Werth bei der abgekürzten Pyramide $\frac{pa}{a-b}$

für k — — — — — — $\frac{qa}{a-b}$

zu substituiren.

Zusatz 2.

Oberfläche.

Aus den Formeln 3. und 4. wird die ganze Oberfläche der abgekürzten Pyramide durch folgenden Ausdruck gefunden:

$$O = S + \frac{1}{4} \cot \frac{180^\circ}{n} (a^2 + b^2) \cdot n$$

c) Die uneigentliche abgekürzte Pyramide.

Ein vierseitiger Körper mit parallelen Grundflächen sei so beschaffen, dafs dessen vier Kanten nicht in einem Punkte zusammenlaufen, der Körper daher nicht als eine abgekürzte Pyramide zu betrachten ist.

Die vier Seiten der einen Grundfläche seien $= a, b, c$ und d
die denselben parallelen Seiten der anderen Grundfläche $= a', b', c'$ und d'
die Seiten a und b, oder a' und b' schliefsen einen Winkel ein, welcher $= \alpha$
die Seiten a und d, oder a' und d' hingegen einen Winkel, welcher $= \beta$
die senkrechte Höhe zwischen beiden Parallelflächen sei ferner $= h$
so ist der Inhalt des Körpers ausgedrückt durch:

$$V = \frac{1}{6} h \sin \alpha [a(b + \frac{1}{2} b') + a'(b' + \frac{1}{2} b)] + \frac{1}{6} h \sin \beta [c(d + \frac{1}{2} d') + c'(d' + \frac{1}{2} d)]$$

Zusatz.

Wenn die Grundflächen des Körpers Rectangel sind, so erhält derselbe die Gestalt eines Pontons. Bei demselben seien:

zwei Seiten des einen Rectangels $= a$ und b
die correspondirenden des anderen $= a'$ und b'
die senkrechte Höhe des Körpers $= h$

so ist: $V = \frac{1}{6} h [a(b' + 2b) + a'(b + 2b')]$

IV. Die regulären Körper.

Es werde für jeden der fünf regulären Körper angenommen:

der körperliche Inhalt $= V$
die Seite der einschliefsenden Figuren $= a$
die Fläche jeder dieser Figuren $= F$

der Radius eines um diese Figuren beschriebenen Kreises $= m$
die gesammte Oberfläche des Körpers $= O$
der Radius der, um den Körper zu beschreibenden Kugel $= r$
der Neigungswinkel der Figuren gegen einander $= \varphi$

A) Der Tetraeder.

Gegeben: Gesucht:

1. r; $a = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}r\sqrt{6} = 1{,}6329931 . r$
$\log a = 0{,}2129843 + \log r$

2. a; $r = \dfrac{a}{2\sqrt{\tfrac{2}{3}}} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}6123724 . a$
$\log r = 0{,}7870156 - 1 + \log a$

3. r; $V = \dfrac{8r^3}{9\sqrt{3}} = \tfrac{8}{27}r^3\sqrt{3} = 0{,}5132002 . r^3$
$\log V = 0{,}7102868 - 1 + 3\log r$

4. a; $V = \dfrac{a^3}{6\sqrt{2}} = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2} = 0{,}1178511 . a$
$\log V = 0{,}0713337 - 1 + \log a$

5. r; $F = \dfrac{2r^2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}r^2\sqrt{3} = 1{,}1547005 . r^2$
$\log F = 0{,}0624693 + 2\log r$

6. a; $F = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0{,}4330127 . a^2$
$\log F = 0{,}6365006 - 1 + 2\log a$

7. r; $O = \dfrac{8r^2}{\sqrt{3}} = \tfrac{8}{3}r^2\sqrt{3} = 4{,}6188021 . r^2$
$\log O = 0{,}6645294 + 2\log r$

8. a; $O = a^2\sqrt{3} = 1{,}7320508 . a^2$
$\log O = 0{,}2385606 + 2\log a$

9. r; $m = \dfrac{2r\sqrt{2}}{3} = 0{,}9428090 . r$
$\log m = 0{,}9744237 - 1 + \log r$

10. a; $m = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} a\sqrt{3} = 0{,}5773502 . a$

$log\, m = 0{,}7614394 - 1 + log\, a$

11. $\angle \varphi = 70^0\, 31'\, 44''$

B) Der Hexaeder.

Gegeben: Gesucht:

1. r; $a = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} r\sqrt{3} = 1{,}1547005 . r$

$log\, a = 0{,}0624693 + log\, r$

2. a; $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254 . a$

$log\, r = 0{,}9375306 - 1 + log\, a$

3. r; $V = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9} r^3\sqrt{3} = 1{,}5396007 . r^3$

$log\, V = 0{,}1874080 + 3\, log\, r$

4. a; $V = a^3$

5. r; $F = \frac{4r^2}{3} = 1{,}3333333 . r^2$

$log\, F = 0{,}1249387 + 2\, log\, r$

6. a; $F = a^2$

7. r; $O = 8r^2$

8. a; $O = 6a^2$

9. r; $m = r\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} r\sqrt{6} = 0{,}8164966 . r$

$log\, m = 0{,}9119543 - 1 + log\, r$

10. a; $m = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068 . a$

$log\, m = 0{,}8494850 - 1 + log\, a$

11. $\angle \varphi = 90^0$

C) Der Oktaeder.

Gegeben: Gesucht:

1. r; $a = r\sqrt{2} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} = 1{,}4142136 . r$

$log\, a = 0{,}1505150 + log\, r$

2. a; $r = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068 \,.\, a$

$\log r = 0{,}8494850 - 1 + \log a$

3. r; $V = \frac{4r^3}{3} = 1{,}3333333 \,.\, r^3$

$\log V = 0{,}1249387 + 3 \log r$

4. a; $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714045 \,.\, a^3$

$\log V = 0{,}6733937 - 1 + 3 \log a$

5. r; $F = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254 \,.\, r^2$

$\log F = 0{,}9375306 - 1 + 2 \log r$

6. a; $F = \frac{a\sqrt{3}}{4} = 0{,}4330127 \,.\, a^2$

$\log F = 0{,}6365006 - 1 + 2 \log a$

7. r; $O = 4r^2\sqrt{3} = 6{,}9282032 \,.\, r^2$

$\log O = 0{,}8406206 + 2 \log r$

8. a; $O = 2a^2\sqrt{3} = 3{,}4641016 \,.\, a^2$

$\log O = 0{,}5395906 + 2 \log a$

9. r; $m = r\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3} r\sqrt{6} = 0{,}8164966 \,.\, r$

$\log m = 0{,}9119543 - 1 + \log r$

10. a; $m = \frac{a}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3} a\sqrt{3} = 0{,}5773502 \,.\, a$

$\log m = 0{,}7614394 - 1 + \log a$

11. $\angle \varphi = 109^0\, 28'\, 16''$

D) Der Dodekaeder.

Gegeben: Gesucht:

1. r; $a = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3} r(\sqrt{15} - \sqrt{3}) = 0{,}7136442 \,.\, r$

$\log a = 0{,}8534818 - 1 + \log r$

2. a; $r = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \tfrac{1}{4} r(\sqrt{15} + \sqrt{3}) = 1{,}4012585 \,.\, a$

$\log r = 0{,}1465182 + \log a$

3. r; $V = \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{27}r^3(\sqrt{75}+\sqrt{15}) = 2{,}7851638 . r^3$

$\log V = 0{,}4448508 + 3 \log r$

4. a; $V = \frac{a^3(5+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}-8} = \frac{1}{4}a^3(35+7\sqrt{5}) = 7{,}6631189 . a^3$

$\log V = 0{,}8844056 + 3 \log a$

5. r; $F = r^2\frac{\sqrt{5}}{6}.\sqrt{(10-2\sqrt{5})} = \frac{1}{6}r^2\sqrt{(50-10\sqrt{5})} = 0{,}8762186 . r^2$

$\log F = 0{,}9426125 - 1 + 2 \log r$

6. a; $F = \frac{5}{4}a^2\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})} = 1{,}7204774 . a^2$

$\log F = 0{,}2356489 + 2 \log a$

7. r; $O = 2r^2\sqrt{[5\sqrt{(10-2\sqrt{5})}]} = 10{,}5146223 . r^2$

$\log O = 1{,}0217937 + 2 \log r$

8. a; $O = 15a^2\sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})} = 20{,}6457288 . a^2$

$\log O = 1{,}3148164 + 2 \log a$

9. r; $m = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{3}r\sqrt{6(5-\sqrt{5})} = 0{,}6070619 . r$

$\log m = 0{,}7832329 - 1 + \log r$

10. a; $m = a\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5})} = 0{,}8506508 . a$

$\log m = 0{,}9297513 - 1 + \log a$

11. $\angle \varphi = 116^\circ\, 33'\, 54''$

E) Der Ikosaeder.

Gegeben: Gesucht:

1. r; $a = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{5} = 1{,}0514622 . r$

$\log a = 0{,}0217937 + \log r$

2. a; $r = \frac{5a}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{8}a(5+\sqrt{5}).\sqrt{(10-2\sqrt{5})} = 0{,}9510565 . a$

$\log r = 0{,}9782063 - 1 + \log a$

3. r; $V = \frac{2r^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3} = 2{,}5361506 . r^3$

$\log V = 0{,}4041751 + 3 \log r$

4. a; $V = \frac{125a^3}{15 - 3\sqrt{5}} = \frac{25}{12}a^3(5 + \sqrt{5}) = 2{,}1816950 . a^3$

$\log V = 0{,}3387940 + 3 \log a$

5. r; $F = \frac{3r^2(5 - \sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{10}r^2(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) = 0{,}4787271 . r^2$

$\log F = 0{,}6800880 - 1 + 2 \log r$

6. a; $F = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4} = 2{,}1650635 . a^2$

$\log F = 0{,}3354707 + 2 \log a$

7. r; $O = \frac{6r^2(5 - \sqrt{5})}{\sqrt{3}} = 2r^2(5\sqrt{3} - \sqrt{15}) = 9{,}5745414 . r^2$

$\log O = 0{,}9811180 + 2 \log r$

8. a; $O = 25a^2\sqrt{3} = 43{,}3012700 . a^2$

$\log O = 1{,}6365006 + 2 \log a$

9. r; $m = \frac{r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{5}r\sqrt{6(5 - \sqrt{5})} = 0{,}6070619 . r$

$\log m = 0{,}7832329 - 1 + \log r$

10. a; $m = a\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{15} = 1{,}2909946 . a$

$\log m = 0{,}1109243 + \log a$

11. $\angle \varphi = 138^\circ\, 11'\, 23''$

V. Der Cylinder.

A) Der gerade Cylinder.

Es sei der körperliche Inhalt eines geraden Cylinders $= V$
dessen krumme Seitenfläche $= S$
dessen Oberfläche $= O$
der Halbmesser der Grundfläche $= r$
der Durchmesser der Grundfläche $= d$
der Umfang der Grundfläche $= p$
die Höhe des Cylinders $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. h, r;	$V = r^2\pi h = 3{,}14159265 . r^2 h$
	$\log V = 0{,}4971499 + 2 \log r + \log h$
2. h, d;	$V = \frac{d^2\pi h}{4} = 0{,}7853982 . d^2 h$
	$\log V = 0{,}8950899 - 1 + 2 \log d + \log h$
3. h, p;	$V = \frac{p^2 h}{4\pi} = 0{,}0795774 . p^2 h$
	$\log V = 0{,}0992099 - 2 + 2 \log p + \log h$
4. S, h;	$V = \frac{S^2}{4\pi h} = 0{,}0795774 . \frac{S^2}{h}$
	$\log V = 0{,}0992099 - 2 + 2 \log S - \log h$
5. S, d;	$V = \frac{dS}{4}$
6. S, r;	$V = \frac{rS}{2}$
7. S, p;	$V = \frac{pS}{4\pi} = 0{,}0795774 . pS$
	$\log V = 0{,}0992099 - 2 + \log p + \log S$
8. O, h;	$V = \frac{\pi h^3 + Oh - h^2 \sqrt{(\pi^2 h^2 + 2\pi O)}}{2}$
9. O, d;	$V = \frac{(2O - \pi d^2) d}{8}$
10. O, r;	$V = \frac{(O - 2\pi r^2) r}{2}$
11. O, p;	$V = \frac{(2\pi O - p^2) p}{8\pi^2}$
12. O, S;	$V = \frac{1}{2} S . \sqrt{\left(\frac{O - S}{2\pi}\right)}$
13. h, d;	$O = (d + 2h)\frac{\pi d}{2} = 1{,}5707963 . (d + 2h) d$
	$\log O = 0{,}1961197 + \log d + \log (d + 2h)$
14. h, r;	$O = (r + h) 2\pi r = 6{,}2831853 . (r + h) r$
	$\log O = 0{,}7981798 + \log r + \log (r + h)$
15. h, p;	$O = \left(\frac{p}{2\pi} + h\right) p = (0{,}1591549 . p + h) p$

M 2

16. S, h; $O = \frac{S^2}{2\pi h^2} + S$

17. S, d; $O = S + \frac{\pi d^2}{2} = S + 1{,}5707963 . d^2$

18. S, r; $O = S + 2\pi r^2 = S + 6{,}2831853 . r^2$

19. S, p; $O = S + \frac{p^2}{2\pi} = S + 0{,}1591549 . p^2$

20. V, h; $O = 2\left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi h V}\right) = \frac{2V}{h} + 3{,}5449177 \sqrt{hV}$

$$\log V = \frac{2V}{h} + N\left(0{,}5496049 + \frac{\log h + \log V}{2}\right)$$

21. V, d; $O = \frac{2V + \pi d^3}{2d}$

22. V, r; $O = \frac{2(V + \pi r^3)}{r}$

23. V, p; $O = \frac{8\pi^2 V + p^3}{2\pi p}$

24. V, S; $O = \frac{8\pi V^2}{S^2} + S$

25. h, d; $S = \pi dh = 3{,}1415927 . dh$

$\log S = 0{,}4971499 + \log d + \log h$

26. h, r; $S = 2\pi rh = 6{,}2831853 . rh$

$\log S = 0{,}7981798 + \log r + \log h$

27. h, p; $S = ph$

28. O, h; $S = h[\sqrt{(2\pi O + \pi^2 h^2)} - \pi h]$

29. O, d; $S = O - \frac{\pi d^2}{2} = O - 1{,}5707963 . d^2$

30. O, r; $S = O - 2\pi r^2 = O - 6{,}2831853 . r^2$

31. O, p; $S = O - \frac{p^2}{2\pi} = O - 0{,}1591549 . p^2$

32. V, h; $S = 2\sqrt{\pi h V} = 3{,}5449077 \sqrt{hV}$

$$\log S = 0{,}5496049 + \frac{\log h + \log V}{2}$$

33. V, d; $S = \frac{4V}{d}$

34. V, r; $S = \frac{2V}{r}$

35. V, p; $S = \frac{4\pi V}{p} = 12{,}5663706 . \frac{V}{p}$

$log\, S = 1{,}0992099 + log\, V - log\, p$

36. S, d; $h = \frac{S}{\pi d} = 0{,}3183099 . \frac{S}{d}$

$log\, h = 0{,}5028501 - 1 + log\, S - log\, d$

37. S, r; $h = \frac{S}{2\pi r} = 0{,}1591549 . \frac{S}{r}$

$log\, h = 0{,}2018199 - 1 + log\, S - log\, r$

38. S, p; $h = \frac{S}{p}$

39. O, d; $h = \frac{O}{\pi d} - \frac{d}{2} = 0{,}3183099 . \frac{O}{d} - \frac{d}{2}$

40. O, r; $h = \frac{O}{2\pi r} - r = 0{,}1591549 . \frac{O}{r} - r$

41. O, p; $h = \frac{O}{p} - \frac{p}{2\pi} = \frac{O}{p} - 0{,}1591549 . p$

42. O, S; $h = \frac{S}{\sqrt{2\pi(O - S)}}$

43. V, d; $h = \frac{4V}{\pi d^2} = 1{,}2732395 . \frac{V}{d^2}$

$log\, h = 0{,}1049100 + log\, V - 2\, log\, d$

44. V, r; $h = \frac{V}{\pi r^2} = 0{,}3183099 . \frac{V}{r^2}$

$log\, h = 0{,}5028501 - 1 + log\, V - 2\, log\, r$

45. V, p; $h = \frac{4\pi V}{p^2} = 12{,}5663706 . \frac{V}{p^2}$

$log\, h = 1{,}0992099 + log\, V - 2\, log\, p$

46. V, S; $h = \frac{S^2}{4\pi V} = 0{,}0795774 . \frac{S^2}{V}$

$log\, h = 0{,}9007898 - 2 + 2\, log\, S - log\, V$

47. V, O; $h = \frac{V}{\sqrt[3]{\pi} . \left[\sqrt[3]{\frac{-v + \sqrt{\left(v^2 - \frac{O^3}{54\pi}\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-v - \sqrt{\left(v^2 - \frac{O^3}{54\pi}\right)}}{2}}\right]^2}$

48. S, h; $d = \frac{S}{\pi h} = 0{,}3183099 . \frac{S}{h}$

$\log d = 0{,}5028501 - 1 + \log S - \log h$

49. O, h; $d = \sqrt{\left(\frac{2O}{h} + h^2\right)} - h = \sqrt{(0{,}6366198 . O + h^2)} - h$

50. O, S; $d = 2\sqrt{\left(\frac{O - S}{2\pi}\right)} = 0{,}7978844 . \sqrt{(O - S)}$

$\log d = 0{,}9019400 - 1 + \tfrac{1}{2} \log (O - S)$

51. V, h; $d = \sqrt{\frac{4V}{\pi h}} = 1{,}1283792 \sqrt{\frac{V}{h}}$

$\log d = 0{,}0524551 + \tfrac{1}{2} (\log V - \log h)$

52. V, S; $d = \frac{4V}{S}$

53. V, O; $d = \sqrt[3]{\left(\frac{-4V + \sqrt{\left(16V^2 - \frac{8O^3}{27\pi}\right)}}{\pi}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-4V - \sqrt{\left(16V^2 - \frac{8O^3}{27\pi}\right)}}{\pi}\right)}$

54. S, h; $r = \frac{S}{2\pi h} = 0{,}1591549 . \frac{S}{h}$

$\log r = 0{,}2018199 - 1 + \log S - \log h$

55. O, h; $r = \sqrt{\left(\frac{2\pi O + \pi^2 h^2}{2\pi}\right)} - \frac{h}{2}$

56. O, S; $r = \sqrt{\left(\frac{O - S}{2\pi}\right)} = 0{,}3989422 . \sqrt{(O - S)}$

$\log r = 0{,}6009100 - 1 + \tfrac{1}{2} \log (O - S)$

57. V, h; $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = 0{,}5641896 \sqrt{\frac{V}{h}}$

$\log r = 0{,}7514251 - 1 + \tfrac{1}{2} (\log V - \log h)$

58. V, S; $r = \frac{2V}{S}$

59. V, O; $r = \sqrt[3]{\left(\frac{-V + \sqrt{\left(V^2 - \frac{O^3}{54\pi}\right)}}{2\pi}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-V - \sqrt{\left(V^2 - \frac{O^3}{54\pi}\right)}}{2\pi}\right)}$

60. S, h; $p = \frac{S}{h}$

61. O, h; $p = \sqrt{\pi(2O + \pi h^2)} - \pi h$

62. O, S; $p = \sqrt{2\pi(O-S)} = 2{,}5066281 . \sqrt{(O-S)}$

$\log p = 0{,}3990899 + \frac{1}{2} \log (O-S)$

63. V, h; $p = \sqrt{\frac{4\pi V}{h}} = 3{,}5449077 . \sqrt{\frac{V}{h}}$

$\log p = 0{,}5496048 + \frac{1}{2}(\log V - \log h)$

64. V, S; $p = \frac{4\pi V}{S} = 12{,}5663706 . \frac{V}{S}$

$\log p = 1{,}0992099 + \log V - \log S$

65. V, O; $p = \sqrt[3]{[-4\pi^2 V + 2\pi\sqrt{(4\pi^2 V^2 - \frac{2}{27}\pi O^3)}]} +$

$+ \sqrt[3]{[-4\pi^2 V - 2\pi\sqrt{(4\pi^2 V^2 - \frac{2}{27}\pi O^3)}]}$

B) Der schiefe Cylinder.

Für den schiefen Cylinder gelten gleichfalls die Formeln 1. 2. 3. 41. 42. 43. 49. 55. 61. des geraden Cylinders.

Ist die Axe a des schiefen Cylinders nebst dem Winkel α gegeben, den dieselbe gegen die Grundfläche macht, so entstehen daraus folgende Formeln:

Gegeben: Gesucht:

1. a, α; $h = a \sin \alpha$

2. h, α; $a = \frac{h}{\sin \alpha} = h \operatorname{cosec} \alpha$

3. V, d, α; $a = \frac{4V}{d^2 \pi \sin \alpha} = 1{,}2732395 . \frac{V}{d^2 \sin \alpha}$

$\log a = 0{,}1049100 + [\log V - (2 \log d + \log \sin \alpha)]$

4. V, a, α; $d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi a \sin \alpha}} = 0{,}1283792 . \sqrt{\frac{V}{a \sin \alpha}}$

$\log d = 0{,}1084946 - 1 + \frac{1}{2}[\log V - (\log a + \log \sin \alpha)]$

5. d, a, α; $V = \frac{1}{4} d^2 \pi a \sin \alpha = 1{,}5707963 . d^2 a \sin \alpha$

$\log V = 0{,}1961197 + 2 \log d + \log a + \log \sin \alpha$

6. p, a, α; $V = \frac{a p^2}{4\pi} . \sin \alpha = 0{,}0795775 . p^2 a \sin \alpha$

$\log V = 0{,}9007903 - 2 + 2 \log p + \log a + \log \sin \alpha$

Zusatz.

Krumme Seitenfläche des schiefen Cylinders.

Die krumme Seitenfläche des schiefen Cylinders wird durch folgende Reihe dargestellt:

$$S = ad\pi\left(1 - \frac{1}{2^2}m - \frac{1.3}{2^2.4^2}m^2 - \frac{1.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}m^3 - \frac{1.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}m^4 - \ldots\right)$$

wo m eine Abkürzungsformel für die Gröfse $1 - \sin^2\alpha$ bedeutet. Also auch:

$$S = ad\pi\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{4} - \frac{3\cos^4\alpha}{64} - \frac{5\cos^6\alpha}{256} - \frac{175\cos^8\alpha}{4096} - \ldots\right)$$

Die Oberfläche des schiefen Cylinders wird erhalten, wenn man zu dem angeführten Ausdrucke für die schiefe Seitenfläche noch $\frac{d^2\pi}{2}$ als die Summe beider Grundflächen addirt.

C) Der gleichseitige Cylinder.

Es sei der körperliche Inhalt eines gleichseitigen Cylinders $= V$
dessen Oberfläche $= O$
die krumme Seitenfläche $= S$
der, der Höhe gleiche, Durchmesser $= a$

Gegeben:	Gesucht:
1. a;	$V = \frac{1}{4}a^3\pi = 0{,}7853981 . a^3$ $\log V = 0{,}8950899 - 1 + 3\log a$
2. S;	$V = \frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0{,}1410474 . S\sqrt{S}$ $\log V = 0{,}1493651 - 1 + \frac{3\log S}{2}$
3. O;	$V = \frac{1}{3}O\sqrt{\frac{2}{3}.\frac{O}{\pi}} = 0{,}3071059 . O\sqrt{O}$ $\log V = 0{,}4872882 - 1 + \frac{3\log O}{2}$
4. a;	$O = \frac{3}{2}a^2\pi = 4{,}7123889 . a^2$ $\log O = 0{,}6732411 + 2\log a$
5. S;	$O = \frac{3}{2}S$

6. V; $O = 3\sqrt[3]{2V^2\pi} = 5{,}5358106 . \sqrt[3]{V^2}$
$log\ O = 0{,}7431813 + \frac{2}{3}\ log\ V$

7. a; $S = a^2\pi = 3{,}1415926 . a^2$
$log\ S = 0{,}4971499 + 2\ log\ a$

8. O; $S = \frac{2}{3} O$

9. V; $S = 2\sqrt[3]{2V^2\pi} = 3{,}6905404 . \sqrt[3]{V^2}$
$log\ S = 0{,}5670899 + \frac{2}{3}\ log\ V$

10. S; $a = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0{,}5641896 . \sqrt{S}$
$log\ a = 0{,}7514250 - 1 + \frac{1}{2}\ log\ S$

11. O; $a = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}} = 0{,}4606589 . \sqrt{O}$
$log\ a = 0{,}6633794 - 1 + \frac{1}{2}\ log\ O$

12. V; $a = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 1{,}0838521 . \sqrt[3]{V}$
$log\ a = 0{,}0349700 + \frac{1}{3}\ log\ V$

D) Der senkrechte schief abgeschnittene Cylinder.

Wenn ein gerader Cylinder durch eine Ebene geschnitten wird, die der Grundfläche nicht parallel ist, so entsteht eine Elipse.

Für den, zwischen beiden Flächen enthaltenen Körper, gelten folgende Formeln:

Es sei der körperliche Inhalt $= V$
die krumme Seitenfläche $= S$
die gesammte Oberfläche $= O$
die eliptische Durchschnittsfläche $= F$
die grofse Axe dieser Elipse $= p$
die kleine — — — $= q$
der Durchmesser des Cylinders $= d$
die gröfste Höhe desselben $= a$
die kleinste Höhe — $= b$
der Neigungswinkel der Durchschnittsfläche gegen die Grundfläche $= \alpha$

Gegeben:	Gesucht:
1. d, a, b;	$V = \frac{1}{8} d^2 \pi (a + b)$
2. d, a, α;	$V = \frac{1}{4} d^2 \pi (a - \frac{1}{2} d \, tang\, \alpha)$
3. a, b, α;	$V = \frac{1}{2} \pi \frac{(a^2 - b^2)(a - b)}{sin^2 \alpha}$
4. d, a, b;	$S = \frac{1}{2} d \pi (a + b)$
5. d, a, α;	$S = d \pi (a - \frac{1}{2} d \, tang\, \alpha)$
6. a, b, α;	$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{sin\, \alpha} (a^2 - b^2) = \frac{1}{2} \pi (a^2 - b^2) \, cosec\, \alpha$
7. d, a, b;	$O = \frac{1}{4} d \pi [d + 2(a + b) + \sqrt{(d^2 + (a - b)^2)}]$
8. d, a, α;	$O = \frac{1}{4} d \pi \left[4a + d \left(\frac{1 - 2\, sin\, \alpha + cos\, \alpha}{cos\, \alpha}\right)\right]$
9. a, b, α;	$O = \frac{1}{4} \pi (a - b) \left[\frac{(a - b) \cdot (1 + \sqrt{1 + sin^2 \alpha}) + 2 (a + b)\, sin\, \alpha}{sin^2 \alpha}\right]$
10. d, α;	$F = \frac{1}{4} \frac{d^2 \pi}{cos\, \alpha} = \frac{1}{4} d^2 \pi \, sec\, \alpha$
11. d, a, b;	$F = \frac{1}{4} d \pi \sqrt{[d^2 + (a - b)^2]}$
12. a, b, α;	$F = \frac{1}{4} \pi \frac{(a - b)^2 \sqrt{(1 + sin^2 \alpha)}}{sin^2 \alpha}$
13. d, a, b;	$p = \sqrt{[d^2 + (a - b)^2]}$
14. a, b, α;	$p = \frac{a - b}{sin\, \alpha} = (a - b) \, sec\, \alpha$
15. d, α;	$p = \frac{d}{cos\, \alpha} = d \, sec\, \alpha$
16. d;	$q = d$
17. a, b, α;	$q = (a - b) \, cot\, \alpha$
18. b, d, α;	$a = b + d \, tang\, \alpha$
19. a, d, α;	$b = a - d \, tang\, \alpha$
20. a, b, α;	$d = (a - b) \, cot\, \alpha$

E) Theile eines Cylinders.

a) Bei einer cylindrischen Röhre sei:

der äufsere Durchmesser $= d$
der innere Durchmesser $= d_{\prime}$
die Dicke der Röhre $= f$
die Höhe derselben $= h$
der körperliche Inhalt $= V$

Gegeben:	Gesucht:
1. $d, d_{\prime}, h$;	$V = \frac{1}{4}\pi h(d^2 - d_{\prime}^2) = \frac{1}{4}\pi h(d + d_{\prime})(d - d_{\prime})$
2. d, f, h;	$V = \pi hf(d - f)$
3. $V, d_{\prime}, h$;	$d = \sqrt{\left(\frac{4V}{\pi h} - d_{\prime}^2\right)}$
4. V, d, h;	$d_{\prime} = \sqrt{\left(d^2 - \frac{4V}{\pi h}\right)}$
5. $V, d, d_{\prime}$;	$h = \frac{4V}{\pi(d + d_{\prime})(d - d_{\prime})}$
6. V, d, f;	$h = \frac{V}{\pi f(d - f)}$
7. V, d, h;	$f = \frac{1}{2}d \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2 - \frac{V}{\pi h}\right)}$

b) Bei einem cylindrischen Sector, der durch zwei in der Axe des Cylinders sich schneidende Ebenen gebildet wird, sei

der Winkel, den beide Ebenen am Mittelpunkte einschliefsen $= \varphi$
der Halbmesser der Grundfläche $= r$
der körperliche Inhalt des Sectors $= V$
die Höhe des Cylinders $= h$

so ist: $V = \frac{1}{2} r^2 h \frac{\pi\varphi}{180^{\circ}}$

Ist der Winkel φ in Minuten gegeben, so wird die Zahl 180 mit 60 u. s. w. multiplicirt.

c) Bei einem cylindrischen Segment, das von einer, mit der Axe parallelen Ebene, abgeschnitten wird, sei

der Halbmesser und die Höhe des Cylinders wie oben;

die Sehne des Segments $= a$
der Pfeil des Segments $= b$
der Winkel, welcher jener Sehne am Mittelpunkte correspondirt $= \varphi$

so ist:

Gegeben:	Gesucht:
1. r, h, φ;	$V = \frac{1}{2} r^2 h (\varphi - \sin\varphi)$
2. a, b, h, φ;	$V = \frac{1}{2} h \left(\frac{a^2 + 4b^2}{8b}\right)^2 . (\varphi - \sin\varphi)$

Anmerkung. Der Bogen φ in Formel 1. und 2. ist vorher in Theilen des Halbmessers auszudrücken.

d) Bei einem hufförmigen Abschnitte, der von einer willkührlich gegen die Grundfläche geneigten Ebene ADEB abgeschnitten wird, sei:

der Halbmesser der Grundfläche $= r$
die Linie BC $= a$
die Linie AB $= b$
die Linie BC $= q$
der körperliche Inhalt $= V$
die gekrümmte Wandfläche $= F$

so ist:

$$1.\quad V = \frac{q}{3a}\left[b(3r^2 - b^2) - 3r^2(r - a) . \, arc \sin\frac{b}{r}\right]$$

oder:

$$2.\quad V = \frac{q}{6a}\left[3r^2(a - r) . \, arc \cos\frac{r - a}{r} + (3r^2 - 2ar + a^2) . \sqrt{(2ar - a^2)}\right]$$

und

$$3.\quad F = \frac{qr}{a}\left[(a - r) . \, arc \cos\frac{r - a}{r} + b\right]$$

VI. Der Kegel.

A) Der gerade Kegel.

Es sei der körperliche Inhalt eines geraden Kegels	$= V$
dessen krumme Seitenfläche	$= S$
die gesammte Oberfläche	$= O$
der Durchmesser der Grundfläche	$= d$
der Halbmesser der Grundfläche	$= r$
der Umfang der Grundfläche	$= p$
die Seite des Kegels	$= a$
der Neigungswinkel der Seiten gegen die Grundfläche	$= \alpha$
die Höhe des Kegels	$= h$

Gegeben: Gesucht:

1. d, h; $V = \frac{1}{12} d^2 \pi h = 0{,}2617994 . d^2 h$

$\log V = 0{,}4179686 - 1 + 2 \log d + \log h$

2. d, a; $V = \frac{1}{12} d^2 \pi \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} d^2)} = 0{,}2617994 . d^2 \sqrt{(a^2 - 0{,}25 d^2)}$

$\log V = 0{,}4179686 - 1 + 2 \log d + \frac{1}{2} \log (a^2 - 0{,}25 d^2)$

3. d, α; $V = \frac{1}{24} d^3 \pi \, tang \, \alpha = 0{,}1308997 . d^3 \, tang \, \alpha$

$\log V = 0{,}1169386 - 1 + 3 \log d + \log tang \, \alpha$

4. p, h; $V = \frac{hp^2}{12 \pi} = 0{,}0265258 . hp^2$

$\log V = 0{,}4236649 - 2 + \log h + 2 \log p$

5. p, a; $V = \frac{1}{12} \frac{p^2 \sqrt{(a^2 \pi^2 - \frac{1}{4} p^2)}}{\pi} = 0{,}0265258 . p^2 \sqrt{(9{,}8696044 a^2 - 0{,}25 p^2)}$

6. p, α; $V = \frac{1}{24} \frac{p^3 \, tang \, \alpha}{\pi^2} = 0{,}0042217 . p^3 \, tang \, \alpha$

$\log V = 0{,}6254874 - 3 + 3 \log p + \log tang \, \alpha$

7. h, a; $V = \frac{1}{3} \pi h (a^2 - h^2) = 1{,}0471976 . h (a^2 - h^2)$

$\log V = 0{,}0200286 + \log h + \log (a^2 - h^2)$

8. h, α; $V = \frac{1}{3} h^3 \pi \cot^2 \alpha = 1{,}0471976 . h^3 \cot^2 \alpha$

$\log V = 0{,}0200286 + 3 \log h + 2 \log \cot \alpha$

9. a, α; $V = \frac{1}{3} a^3 \pi \cos^2 \alpha \sin \alpha = 1{,}0471976 . a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$

$\log V = 0{,}0200286 + 3 \log a + 2 \log \cos \alpha + \log \sin \alpha$

10. r, h; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h = 1{,}0471976 . r^2 h$

$\log V = 0{,}0200286 + 2 \log r + \log h$

11. r, a; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{(a^2 - r^2)} = 1{,}0471976 . r^2 \sqrt{(a^2 - r^2)}$

$\log V = 0{,}0200286 + 2 \log r + \frac{1}{2} \log (a^2 - r^2)$

12. r, α; $V = \frac{1}{3} r^3 \pi \operatorname{tang} \alpha = 1{,}0471976 . r^3 \operatorname{tang} \alpha$

$\log V = 0{,}0200286 + 3 \log r + \log \operatorname{tang} \alpha$

13. S, d; $V = \frac{1}{12} d^2 \pi \sqrt{\left(\frac{4S^2}{d^2 \pi^2} - \frac{1}{4} d^2\right)} = 0{,}2617994 . d . \sqrt{(0{,}4052847 . S^2 - 0{,}25 d^4)}$

14. S, h; $V = \frac{1}{3} \pi h \left[\sqrt{\left(\frac{S^2}{\pi^2} + \frac{h^4}{4}\right)} - \frac{h^2}{2}\right] = 1{,}0471976 . h . [\sqrt{(0{,}1013212 S^2 + 0{,}25 h^4)} - 0{,}5 h^2]$

15. S, p; $V = \frac{p^2}{12\pi} \sqrt{\left(\frac{4S^2}{p^2} - \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} = 0{,}0265258 . p^2 . \sqrt{\left(\frac{4S^2}{p^2} - 0{,}0253303 p^2\right)}$

16. S, a; $V = \frac{S^2}{3\pi} \sqrt{\left(a^2 - \frac{S^2}{\pi^2 a^2}\right)} = 0{,}1061033 . S^2 \sqrt{\left(a^2 - \frac{S^2}{a^2}\right)}$

17. S, O; $V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[\pi^2 S^2 - (O - S)^2] . (O - S)}{\pi}}$

18. d, a; $O = (2a + d) \frac{\pi d}{4} = 0{,}7853982 . d (2a + d)$

$\log O = 0{,}8950899 - 1 + \log d + \log (2a + d)$

19. d, h; $O = \frac{1}{4} d \pi [d + 2 \sqrt{(\frac{1}{4} d^2 - h^2)}] = 0{,}7853982 . d [d + 2 \sqrt{(0{,}25 d^2 - h^2)}]$

$\log O = 0{,}8950899 - 1 + \log d + \log [d + 2 \sqrt{(0{,}25 d^2 - h^2)}]$

20. d, α; $O = \frac{1}{4} d^2 \pi \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}\right) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \pi \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} = 1{,}5707963 . \frac{d^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha}$

$\log O = 0{,}1961198 + 2 \log d + 2 \log \cos \frac{1}{2} \alpha - \log \cos \alpha$

21. p, h; $O = \frac{p}{4\pi} [\sqrt{(p^2 + 4 h^2 \pi^2)} + p] = 0{,}0795775 . p . [\sqrt{(p^2 + 39{,}4784176 h^2)} + p]$

22. p, a; $O = \left(2a + \frac{p}{\pi}\right) \frac{p}{4} = 0{,}25 p (2a + 0{,}3183099 p)$

$\log O = 0{,}3979400 - 1 + \log p + \log (2a + 0{,}3183099 p)$

23. p, α; $O = \frac{p^2}{4\pi}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{p^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\pi\cos\alpha} = 0{,}1609979.\frac{p^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}$

24. h, a; $O = \pi[a^2-h^2+a\sqrt{(a^2-h^2)}]$

25. h, α; $O = h^2\pi\left[\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{1+\cos^2\alpha}\right] = \frac{2h^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\cos^2\alpha}$

26. a, α; $O = a^2\pi[\cos\alpha(1+\cos\alpha)] = 2a^2\pi\cos\alpha\cos^2\frac{1}{2}\alpha$

27. r, a; $O = (a+r)\pi r$

28. r, h; $O = \pi r[r+\sqrt{(h^2+r^2)}]$

29. r, α; $O = r^2\pi\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{2r^2\pi\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}$

30. d, h; $S = \frac{1}{2}d\pi\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+h^2)} = 1{,}5707963.\,d\sqrt{(0{,}25\,d^2+h^2)}$

$\log S = 0{,}1961198+\log d+\frac{1}{2}\log(0{,}25\,d^2+h^2)$

31. d, a; $S = \frac{ad\pi}{2} = 1{,}5707963.\,ad$

$\log S = 0{,}1961198+\log a+\log d$

32. d, α; $S = \frac{d^2\pi}{4\cos\alpha} = 0{,}7853982.\frac{d^2}{\cos\alpha}$

$\log S = 0{,}8950899-1+2\log d-\log\cos\alpha$

33. p, h; $S = \frac{1}{4}p\sqrt{\left(\frac{p^2}{\pi^2}+4h^2\right)} = 0{,}25\,p\sqrt{(0{,}1013212\,p^2+4h^2)}$

34. p, a; $S = \frac{1}{2}ap$

35. p, α; $S = \frac{p^2}{4\pi\cos\alpha} = 0{,}0795775.\frac{p^2}{\cos\alpha}$

$\log S = 0{,}9007903-2+2\log p-\log\cos\alpha$

36. h, a; $S = a\pi\sqrt{(a^2-h^2)} = 3{,}1415926.\,a\sqrt{(a^2-h^2)}$

$\log S = 0{,}4971499+\log a+\frac{1}{2}\log(a^2-h^2)$

37. h, α; $S = \frac{h^2\pi\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}$

38. a, α; $S = a^2\pi\cos\alpha$

39. r, a; $S = \pi ar$

40. r, h; $S = \frac{1}{2}r\pi\sqrt{(r^2+h^2)}$

41. r, α; $S = \frac{r^2\pi}{\cos\alpha} = r^2\pi\sec\alpha$

42. V, d; $S = \sqrt{\left(\frac{36V^2}{d^2}+\frac{d^4\pi^2}{16}\right)} = \sqrt{\left(\frac{36V^2}{d^2}+0{,}6168503\,d^4\right)}$

43. V, p; $S = \sqrt{\left(\frac{36V^2\pi^2}{p^2} + \frac{p^4}{16\pi^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{355,3057584\, V^2}{p^2} + \frac{p^4}{157,9136704}\right)}$

44. V, h; $S = \sqrt{\left(3\pi hV + \frac{9V^2}{h^2}\right)} = \sqrt{\left(9,4247779\, hV + \frac{9V^2}{h^2}\right)}$

45. h, a; $d = 2\sqrt{(a^2 - h^2)}$

46. h, α; $d = 2h \cot \alpha$

47. a, α; $d = 2a \cos \alpha$

48. S, h; $d = \sqrt{\left[-2h^2 + \sqrt{\left(\frac{16S^2}{\pi^2} + 4h^4\right)}\right]}$

49. S, a; $d = \frac{2S}{\pi a} = 0,6366198 . \frac{S}{a}$

$\log d = 0,8038801 - 1 + \log S - \log a$

50. S, O; $d = 2\sqrt{\left(\frac{O - S}{\pi}\right)}$

51. V, h; $d = \sqrt{\frac{12V}{\pi h}} = 1,9544100 . \sqrt{\frac{V}{h}}$

$\log d = 0,2910157 + \frac{1}{2}(\log V - \log h)$

52. h, a; $p = 2\pi\sqrt{(a^2 - h^2)}$

53. h, α; $p = 2h\pi \cot \alpha$

54. a, α; $p = 2a\pi \cos \alpha$

55. S, h; $p = \sqrt{[-2h^2\pi^2 + 2\pi\sqrt{(4S^2 + h^4\pi^2)}]}$

56. S, a; $p = \frac{2S}{a}$

57. S, O; $p = 2\sqrt{(O - S)\pi}$

58. V, h; $p = \sqrt{\left(\frac{12\pi V}{h}\right)} = 6,1399600 . \sqrt{\frac{V}{h}}$

$\log p = 0,7881656 + \frac{\log V - \log h}{2}$

59. d, a; $h = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}d^2)}$

60. d, α; $h = \frac{1}{2} d \tan \alpha$

61. p, a; $h = \sqrt{\left(a^2 - \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} = \sqrt{(a^2 - 0,0253303 . p^2)}$

62. p, α; $h = \frac{p \, tang \, \alpha}{2\pi} = 0{,}1591549 . p \, tang \, \alpha$

$log \, h = 0{,}2018199 - 1 + log \, p + log \, tang \, \alpha$

63. a, α; $h = a \, sin \, \alpha$

64. S, d; $h = \sqrt{\left(\frac{4S^2}{d^2\pi^2} - \frac{1}{4}d^2\right)} = \sqrt{\left(0{,}4052848 . \frac{S^2}{d^2} - 0{,}25 . d^2\right)}$

65. S, p; $h = \sqrt{\left(\frac{4S^2}{p^2} - \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4S^2}{p^2} - 0{,}0253303 . p^2\right)}$

66. S, a; $h = \frac{\sqrt{(a^4\pi^2 - S^2)}}{a\pi} = 0{,}3183099 . \frac{\sqrt{(a^4\pi^2 - S^2)}}{a}$

$log \, h = 0{,}5028501 - 1 + \frac{1}{2} log \, (a^4\pi^2 - S^2) - log \, a$

67. S, O; $h = \sqrt{\left[\frac{\pi^2 S^2 - (O - S)^2}{\pi(O - S)}\right]}$

68. V, d; $h = \frac{12V}{d^2\pi} = 3{,}8197186 . \frac{V}{d^2}$

$log \, h = 0{,}5820313 + log \, V - 2 \, log \, d$

69. V, p; $h = \frac{12\pi V}{p^2} = 37{,}6991118 . \frac{V}{p^2}$

$log \, h = 1{,}5763311 + log \, V - 2 \, log \, p$

70. V, a; $h = \sqrt[3]{\left[-\frac{3V}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{9V^2}{4\pi^2} - \frac{a^6}{27}\right)}\right]} + \cdot$

$\cdot + \sqrt[3]{\left[-\frac{3V}{2\pi} - \sqrt{\left(\frac{9V^2}{4\pi^2} - \frac{a^6}{27}\right)}\right]}$

71. d. h; $a = \sqrt{(h^2 + \frac{1}{4}d^2)}$

72. d, α; $a = \frac{d}{2 \, cos \, \alpha}$

73. p. h; $a = \sqrt{\left(h^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)} = \sqrt{(h^2 + 0{,}0253303 . p^2)}$

74. p, α; $a = \frac{p}{2\pi \, cos \, \alpha} = 0{,}1591549 . \frac{p}{cos \, \alpha} = 0{,}1591549 . p \, sec \, \alpha$

$log \, a = 0{,}2018199 - 1 + log \, p - log \, cos \, \alpha$

75. h, α; $a = \frac{h}{\sqrt{(1 + 2 \, cos \, \alpha)(1 - 2 \, cos \, \alpha)}}$

76. S, d; $a = \frac{2S}{d\pi} = 0{,}6366198 . \frac{S}{d}$

$log\ a = 0{,}8038801 - 1 + log\ S - log\ d$

77. S, p; $a = \frac{2S}{p}$

78. S, h; $a = \sqrt{\left[\frac{h^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{S^2}{\pi^2} + \frac{h^4}{4}\right)}\right]}$

79. S, O; $a = \frac{S}{\sqrt{\pi(O-S)}}$

80. V, d; $a = \frac{\sqrt{(576V^2 - d^6\pi^2)}}{2d^2\pi}$

81. V, p; $a = \frac{\sqrt{(576V^2\pi^4 - p^6)}}{2p^2\pi}$

82. V, h; $a = \sqrt{\left(\frac{3V}{\pi h} + h^2\right)}$

83. d, h; $tang\ \alpha = \frac{2h}{d}$

84. d, a; $cos\ \alpha = \frac{d}{2a}$

85. p, h; $tang\ \alpha = \frac{2h\pi}{p} = 6{,}2831853 . \frac{h}{p}$

$log\ tang\ \alpha = 0{,}7981798 + log\ h - log\ p$

86. p, a; $cos\ \alpha = \frac{p}{2a\pi} = 0{,}1591549 . \frac{p}{a}$

$log\ cos\ \alpha = 0{,}2018199 - 1 + log\ p - log\ a$

87. h, a; $sin\ \alpha = \frac{h}{a}$

B) Der schiefe Kegel.

Es sei der körperliche Inhalt eines schiefen Kegels = V
der Durchmesser seiner Grundfläche = d
die längste Seitenlinie des Kegels = a
die kürzeste — — — = b

die Neigungswinkel dieser beiden Seitenlinien gegen die Grundfläche $= \beta$ und γ

der Winkel, den diese beiden Seiten an der Spitze des Kegels einschliefsen $= \alpha$

Gegeben:	Gesucht:
1. a, b, d;	$V = \frac{1}{24} d\pi \sqrt{(2d^2a^2 + 2d^2b^2 + 2a^2b^2 - d^4 - a^4 - b^4)}$
2. a, b, α;	$V = \frac{1}{12} ab\pi \sin\alpha \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)}$
3. a, β, γ;	$V = \frac{1}{12} a^3\pi \sin\beta \left[\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}\right]^2$
4. d, β, γ;	$V = \frac{1}{12} d^3\pi \frac{\sin\beta . \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$
5. a, b, α;	$d = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)}$
6. a, β, γ;	$d = \frac{a\sin(\beta+\gamma)}{\sin\gamma}$
7. d, β, γ;	$a = \frac{d\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$
8. d, b, γ;	$a = \sqrt{(d^2 + b^2 - 2db\cos\gamma)}$
9. d, α, β;	$b = \frac{d\sin\beta}{\sin\alpha}$
10. d, β, γ;	$b = \frac{d\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$

Zusatz.

Krumme Seitenfläche des schiefen Kegels.

Wenn zur Berechnung der krummen Seitenfläche eines schiefen Kegels gegeben ist: der Durchmesser d, die Axe q und der Winkel φ, den dieselbe gegen die Grundfläche macht, so wird die Seitenfläche durch folgende Reihe ausgedrückt:

$$S = \frac{1}{2}\pi d \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + q^2 \sin^2\varphi)} . \left[1 + \frac{1}{4} . \frac{1}{n^4} . \cot^2\varphi - \frac{1.3}{4.16}\left(\frac{1.3}{n^6} - \frac{3.5\,m^2}{n^8}\right)\frac{\cot^4\varphi}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{4.16.36}\left(\frac{1.3.5}{n^8} - 2.\frac{3.5.7.m^2}{n^{10}} + \frac{5.7.9.m^4}{n^{12}}\right)\frac{\cot^6\varphi}{5} \ldots\right]$$

wo m eine Abkürzungsformel für $\frac{d}{2q \sin \alpha}$

und n — — — für $\frac{\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + q^2 \sin^2 \alpha)}}{q \sin \alpha}$ bedeutet.

(Siehe Euler in *Nov. act. Acad. Petrop. III.* 89.)

C) Der abgekürzte gerade Kegel.

Es sei der körperliche Inhalt eines abgekürzten geraden Kegels $= V$
der Durchmesser der beiden Grundflächen $= d$ und $d_{\prime}$
die Seitenlinie des Körpers $= a$
der Winkel, welchen diese mit der Grundfläche macht $= \alpha$
die Höhe des abgekürzten Kegels $= h$

Gegeben:	Gesucht:
1. $d, d_{\prime}, h$;	$V = \frac{1}{12}\pi h\,[(d+d_{\prime})^2 - dd_{\prime}] = \frac{1}{12}\pi h\,(d^2 + dd_{\prime} + d_{\prime}^2)$
2. $d, d_{\prime}, a$;	$V = \frac{1}{12}\pi\,(d^2 + dd_{\prime} + d_{\prime}^2)\,.\sqrt{[a^2 - \frac{1}{4}(d - d_{\prime})^2]}$
3. $d, d_{\prime}, \alpha$;	$V = \frac{1}{24}\pi\,(d - d_{\prime})\,(d^2 + dd_{\prime} + d_{\prime}^2)\,\tang \alpha$
4. d, a, α;	$V = \frac{1}{12}\pi a \sin \alpha\,(3d^2 - 6ad \cos \alpha + 4a^2 \cos^2 \alpha)$
5. $d, d_{\prime}, h$;	$S = \frac{1}{2}\pi\,(d + d_{\prime})\,.\sqrt{[h^2 + \frac{1}{4}(d - d_{\prime})^2]}$
6. $d, d_{\prime}, a$;	$S = \frac{1}{2}\pi a\,(d + d_{\prime})$
7. $d, d_{\prime}, \alpha$;	$S = \frac{1}{4}\pi \frac{(d + d_{\prime})\,(d - d_{\prime})}{\cos \alpha}$
8. d, a, α;	$S = \pi a\,(d - a \cos \alpha)$
9. $d, d_{\prime}, h$;	$O = \frac{1}{4}\pi\,[2\,(d + d_{\prime})\,.\sqrt{[h^2 + \frac{1}{4}(d - d_{\prime})^2]} + d^2 + d_{\prime}^2]$
10. $d, d_{\prime}, a$;	$O = \frac{1}{4}\pi\,[(2a + d + d_{\prime})\,(d + d_{\prime}) - 2dd_{\prime}]$
11. $d, d_{\prime}, \alpha$;	$O = \frac{1}{4}\pi\left[\frac{(d + d_{\prime})\,(d - d_{\prime})}{2 \cos \alpha} + d^2 + d_{\prime}^2\right] = \frac{1}{8}\pi\left[\frac{d^2\,(2 \cos \alpha + 1) + d_{\prime}^2\,(2 \cos \alpha - 1)}{\cos \alpha}\right]$
12. d, a, α;	$O = \frac{1}{2}\pi\,[(2a + d)\,d + \frac{1}{2}a \cos \alpha\,(\cos \alpha - 2\,(a + d))]$
13. $d_{\prime}, a, \alpha$;	$d = d_{\prime} + 2a \cos \alpha$
14. $d_{\prime}, a, h$;	$d = 2\sqrt{(a^2 - h^2)} + d_{\prime}$
15. $V, d_{\prime}, h$;	$d = \sqrt{\left(\frac{12V}{\pi h} - \frac{3d_{\prime}^2}{4}\right)} - \frac{d}{2}$

16. S, $d_{,}$, a; $$d = \frac{2S}{\pi a} - d_{,}$$

17. O, $d_{,}$, a; $$d = \sqrt{\left(\frac{4O}{\pi} - 2\,ad_{,} - d_{,}^2 + a^2\right)} - a$$

18. d, a, h; $$d_{,} = d - 2\sqrt{(a^2 - h^2)}$$

19. V, d, h; $$d_{,} = \sqrt{\left[\left(\frac{12V}{\pi h}\right) - \frac{3d^2}{4}\right]} - \frac{d}{2}$$

20. S, d, a; $$d_{,} = \frac{2S}{\pi a} - d$$

21. O, d, a; $$d_{,} = \sqrt{\left(\frac{4O}{\pi} - 2ad - d^2 + a^2\right)} - a$$

22. d, h, α; $$d_{,} = d - 2h \cot \alpha$$

23. d, $d_{,}$, α; $$a = \frac{d - d_{,}}{2 \cos \alpha}$$

24. d, $d_{,}$, h; $$a = \sqrt{[h^2 + \tfrac{1}{4}(d - d_{,})^2]}$$

25. S, d, $d_{,}$; $$a = \frac{2S}{\pi(d + d_{,})}$$

26. O, d, $d_{,}$; $$a = \frac{\frac{4O}{\pi} - (d + d_{,})^2 + 2dd_{,}}{2(d + d_{,})}$$

27. V, d, $d_{,}$; $$a = \frac{\sqrt{[144V^2 + (d^3 + d_{,}^3)^2 \tfrac{1}{4}\pi^2]}}{\pi(d^2 + dd_{,} + d_{,}^2)}$$

28. d, $d_{,}$, α; $$h = \tfrac{1}{2}(d - d_{,}) \tan \alpha$$

29. d, $d_{,}$, a; $$h = \sqrt{[a^2 - \tfrac{1}{4}(d - d_{,})^2]}$$

30. S, d, $d_{,}$; $$h = \frac{\sqrt{[4S^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2(d^2 - d_{,}^2)^2]}}{\pi(d + d_{,})}$$

31. O, d, $d_{,}$; $$h = \frac{\sqrt{[4O^2 - 2O\pi(d^2 + d_{,}^2) + \pi^2 d^2 d_{,}^2]}}{\pi(d + d_{,})}$$

32. V, d, $d_{,}$; $$h = \frac{12V}{\pi[(d + d_{,})^2 - dd_{,}]}$$

D) Abschnitte eines Kegels.

Bei einem hufförmigen Abschnitte, der durch eine, parallel mit der Seite des Kegels gelegte Ebene CD, entstanden ist, sei

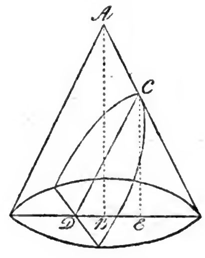
der Radius der Grundfläche = r

die Höhe des Kegels AB = h

die Höhe des hufförmigen Abschnittes CE = q

der körperliche Inhalt desselben = V

die gekrümmte Wandfläche desselben = F



so ist:

$$1.\quad V = \frac{r^2}{qh^2}\left[3h^3 \,.\, arc\,cos\,\frac{h-2q}{h} - (6h^2+4hq-16q^2)\,.\,\sqrt{q(h-q)}\right]$$

und

$$2.\quad F = \frac{r\sqrt{(h^2+r^2)}}{h^2}\,.\left[h^2 \,.\, arc\,cos\,\frac{h-2q}{h} - \frac{(6h-4q)\,.\sqrt{q(h-q)}}{3}\right]$$

VII. Die Kugel.

A) Berechnung der ganzen Kugel.

Es sei der körperliche Inhalt einer Kugel = V
deren Oberfläche = O
der Durchmesser = d
der Halbmesser = r

Gegeben: Gesucht:

1. d; $V = \frac{1}{6}\pi d^3 = 0{,}523598775598\,.\,d^3$

$log\,V = 0{,}7189986223 - 1 + 3\,log\,d$

2. r; $V = \frac{4\pi r^3}{3} = 4{,}188790204786\,.\,r^3$

$log\,V = 0{,}6220886095 + 3\,log\,r$

3. O; $V = \sqrt{\frac{O^3}{36\pi}} = 0{,}094031597258 . O\sqrt{O}$

$\log V = 0{,}9732738134 - 2 + \frac{3}{2} \log O$

4. d; $O = \pi d^2 = 3{,}141592653590 . d^2$

$\log O = 0{,}497149872694 + 2 \log d$

5. r; $O = 4\pi r^2 = 12{,}566370614359 . r^2$

$\log O = 1{,}0992098642 + 2 \log r$

6. V; $O = \sqrt[3]{36 V^2 \pi} = 4{,}835975862048 . \sqrt[3]{V^2}$

$\log O = 0{,}6844841246 + \frac{2}{3} \log V$

7. V; $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = 1{,}240700981799 . \sqrt[3]{V}$

$\log d = 0{,}0936811443 + \frac{1}{3} \log V$

8. O; $d = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = 0{,}564189583548 . \sqrt{O}$

$\log d = 0{,}7514250636 - 1 + \frac{1}{2} \log O$

9. V; $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620350490900 . \sqrt[3]{V}$

$\log r = 0{,}7926402233 - 1 + \frac{1}{3} \log V$

10. O; $r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = 0{,}282094791773 . \sqrt{O}$

$\log r = 0{,}4503950682 - 1 + \frac{1}{2} \log O$

B) Berechnung einzelner Theile der Kugel.

a) Allgemeine Hülfslinien.

Wenn eine Kugel irgendwo von einer Ebene geschnitten wird, so sei:

der Halbmesser des Durchschnittskreises $= t$

der Abstand des Mittelpunktes dieses Kreises von der Oberfläche der Kugel (der Pfeil) $= f$

der Abstand des Mittelpunktes von dem Mittelpunkt der Kugel $= q$

der, dem Durchschnittskreise am Mittelpunkte der Kugel, correspondirende Winkel $= \alpha$

der Radius der Kugel $= r$

Gegeben:	Gesucht:
1. r, t;	$f = r - \sqrt{(r^2 - t^2)}$
2. r, q;	$f = r - q$
3. r, α;	$f = (1 - \cos\frac{1}{2}\alpha) r = r \cos vers \frac{1}{2}\alpha = 2r \sin^2 \frac{1}{4}\alpha$
4. t, q;	$f = \sqrt{(t^2 + q^2)} - q$
5. r, f;	$t = \sqrt{(2rf - f^2)} = \sqrt{(2r - f)f}$
6. r, q;	$t = \sqrt{(r^2 - q^2)}$
7. r, α;	$t = r \sin \frac{1}{2}\alpha$
8. r, f;	$q = r - f$
9. r, t;	$q = \sqrt{(r^2 - t^2)}$
10. r, α;	$q = r \cos \frac{1}{2}\alpha$
11. t, f;	$q = \frac{t^2 - f^2}{2f}$
12. f, t;	$r = \frac{t^2 + f^2}{2f}$
13. f, q;	$r = f + q$
14. t, q;	$r = \sqrt{(q^2 + t^2)}$

b) Der sphärische Ausschnitt (Sector).

Es sei der körperliche Inhalt eines sphärischen Sectors $= C$
die sphärische Fläche desselben $= S$
die gesammte Oberfläche $= O$

Gegeben:	Gesucht:
1. r, f;	$C = \frac{2}{3} r^2 \pi f = 2{,}0943951 . r^2 f$ $\log C = 0{,}3210586 + 2 \log r + \log f$
2. r, t;	$C = \frac{2}{3} r^2 \pi [r - \sqrt{(r^2 - t^2)}] = 2{,}0943951 . r^2 [r - \sqrt{(r^2 - t^2)}]$ $\log C = 0{,}3210586 + 2 \log r + \log [r - \sqrt{(r^2 - t^2)}]$
3. r, q;	$C = \frac{2}{3} r^2 \pi (r - q) = 2{,}0943951 . r^2 (r - q)$ $\log C = 0{,}3210586 + 2 \log r + \log (r - q)$
4. r, α;	$C = \frac{2}{3} r^3 \pi (1 - \cos\frac{1}{2}\alpha) = \frac{2}{3} r^3 \pi \cos vers \frac{1}{2}\alpha = \frac{4 r^3 \pi \sin^2 \frac{1}{4}\alpha}{3} =$ $= 4{,}1887902 . r^3 \sin^2 \frac{1}{4}\alpha$ $\log C = 0{,}6220886 + 3 \log r + 2 \log \sin \frac{1}{4}\alpha$

5. f, t; $C = \frac{1}{6}\pi . \frac{f^2+t^2}{f} = 0{,}5235988 . \frac{f^2+t^2}{f}$

$\log C = 0{,}7189985 - 1 + \log(f^2+t^2) - \log f$

6. t, q; $C = \frac{2}{3}\pi [(\sqrt{(q^2+t^2)} - q) . (t^2+q^2)] = 2{,}0943951 .$
$. [(\sqrt{(q^2+t^2)} - q) . (t^2+q^2)]$

$\log C = 0{,}3210586 + \log [(\sqrt{(q^2+t^2)} - q) . (t^2+q^2)]$

7. r, f; $S = 2rf\pi$

8. r, t; $S = 2r\pi \sqrt{(r^2-t^2)}$

9. r, q; $S = 2r\pi (r-q)$

10. r, α; $S = 2r^2\pi (1 - \cos\frac{1}{2}\alpha) = 4r^2\pi \sin^2\frac{1}{4}\alpha$

11. f, t; $S = \pi (f^2+t^2)$

12. t, q; $S = 2\pi [t^2+q^2+q\sqrt{(t^2+q^2)}]$

13. r, f; $O = \pi r [2f + \sqrt{(2rf-f^2)}]$

14. r, t; $O = \pi r [2\sqrt{(r^2-t^2)} + t]$

15. r, q; $O = \pi r [2(r-q) + \sqrt{(r^2-q^2)}]$

16. r, α; $O = \pi r^2 [2(1-\cos\frac{1}{2}\alpha) + \sin\frac{1}{2}\alpha] = \pi r^2 (4\sin^2\frac{1}{4}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha)$

17. f, t; $O = \pi . \frac{(2f+t).(f^2+t^2)}{2f}$

18. t, q; $O = \pi [2t^2+2q^2+(2q+t).\sqrt{(t^2+q^2)}]$

19. C, r; $f = \frac{3C}{2r^2\pi} = 0{,}4774647 . \frac{C}{r^2}$

$\log f = 0{,}6789412 - 1 + \log C - 2\log r$

20. S, r; $f = \frac{S}{2r\pi} = 0{,}1591549 . \frac{S}{r}$

$\log f = 0{,}2018199 - 1 + \log S - \log r$

21. C, r; $t = \frac{\sqrt{(4r^3\pi - 3C)3C}}{2r^2\pi} = 0{,}2756645 . \frac{\sqrt{[C(4r^3\pi - 3C)]}}{r^2}$

$\log t = 0{,}4403808 - 1 + \frac{1}{2}\log [C(4r^3\pi - 3C)] - 2\log r$

22. S, r; $t = \frac{\sqrt{(4r^4\pi - S^2)}}{2r\pi} = 0{,}1591549 . \frac{\sqrt{(4r^4\pi - S^2)}}{r}$

$\log t = 0{,}2018199 - 1 + \frac{1}{2}\log(4r^4\pi - S^2) - \log r$

23. C, r; $q = r - \frac{3C}{2r^2\pi} = 0{,}4774647 . \frac{C}{r^2}$

$log\, q = 0{,}6789412 - 1 + log\, C - 2\, log\, r$

24. S, r; $q = r - \frac{S}{2r\pi} = r - \frac{S}{0{,}1591549 . r}$

25. C, α; $r = \sqrt[3]{\left(\frac{3C}{2\pi\, cos\, vers\, \frac{1}{2}\alpha}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{3C}{4\pi\, sin^2\, (45 - \frac{1}{4}\alpha)}\right)}$

26. S, α; $r = \sqrt{\left(\frac{S}{2\pi\, cos\, vers\, \frac{1}{2}\alpha}\right)} = \sqrt{\left(\frac{S}{4\pi\, sin^2\, (45 - \frac{1}{4}\alpha)}\right)}$

c) Der sphärische Abschnitt (Segment).

Es sei der körperliche Inhalt eines sphärischen Segments $= G$
dessen gesammte Oberfläche $= Q$

Gegeben:		Gesucht:
1.	r, f;	$G = f^2\pi\,(r - \frac{1}{3}f)$
2.	r, t;	$G = \frac{1}{3}\pi\,[2r^3 - (2r^2 + t^2) . \sqrt{(r^2 - t^2)}]$
3.	r, q;	$G = \frac{1}{3}\pi\,(r - q)^2 . (2r + q)$
4.	r, α;	$G = \frac{2}{3}r^3\pi\,(1 - cos\,\frac{1}{2}\alpha)^2 . (1 + \frac{1}{2}\, cos\,\frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{3}r^3\pi\,(2 - 3\, cos\,\frac{1}{2}\alpha + cos^3\,\frac{1}{2}\alpha)$
5.	f, t;	$G = \pi f\,(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}f^2)$
6.	t, q;	$G = \frac{1}{3}\pi\,[2\,(q^2 + t^2) . \sqrt{(t^2 + q^2)} - q\,(2q^2 - 3t^2)]$
7.	r, f;	$Q = \pi f\,(4r - f)$
8.	r, t;	$Q = \pi\,[2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - t^2)} + t^2]$
9.	r, q;	$Q = \pi\,(r - q) . (3r + q)$
10.	r, α;	$Q = \pi r^2\,(1 - cos\,\frac{1}{2}\alpha) . (3 + cos\,\frac{1}{2}\alpha)$
11.	f, t;	$Q = \pi\,(2t^2 + f^2)$
12.	t, q;	$Q = \pi\,[3t^2 + 2q^2 - 2q\sqrt{(q^2 + t^2)}]$

13. G, r; $f = r - \sqrt[3]{\left[\frac{3G - 2r^3\pi + \sqrt{3G\,(3G - 4r^3\pi)}}{2\pi}\right]} -$

$- \sqrt[3]{\left[\frac{3G - 2r^3\pi - \sqrt{3G\,(3G - 4r^3\pi)}}{2\pi}\right]}$

14. Q, r; $f = 2r - \sqrt{\left(\frac{4r^2\pi - Q}{\pi}\right)}$

15. G, r; $t = \sqrt{\left[r^2 - \sqrt[3]{\frac{(3G-2r^3\pi).(3G-2r^3\pi+\sqrt{3G.(3G-4r^3\pi)})-2r^6\pi^2}{2\pi}} - \cdot\right.}$

$\left.\cdot - \sqrt[3]{\frac{(3G-2r^3\pi).(3G-2r^3\pi-\sqrt{3G.(3G-4r^3\pi)})-2r^6\pi^2}{2\pi}} - \sqrt[3]{2r^6\pi}\right]$

16. Q, r; $t = \sqrt{\left[2r\sqrt{\left(\frac{4r^2\pi - Q}{\pi}\right)} - \frac{4r^2\pi - Q}{\pi}\right]}$

17. G, r; $q = \sqrt[3]{\left(\frac{3G - 2r^3\pi + \sqrt{3G(3G - 4r^3\pi)}}{2\pi}\right)} + \cdot$

$\cdot + \sqrt[3]{\left(\frac{3G - 2r^3\pi - \sqrt{3G(3G - 4r^3\pi)}}{2\pi}\right)}$

18. Q, r; $q = \sqrt{\left(\frac{4r^2\pi - Q}{\pi}\right)} - r$

19. G, r; $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{3G - 2r^3\pi + \sqrt{3G(3G - 4r^3\pi)}}{2r^3\pi}\right)} + \cdot$

$\cdot + \sqrt[3]{\left(\frac{3G - 2r^3\pi - \sqrt{3G(3G - 4r^3\pi)}}{2r^3\pi}\right)}$

20. Q, r; $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{4r^2\pi - Q}{\pi r^2}\right)} - 1$

Zusatz 1.

Die sphärische Fläche des Segments ist offenbar dieselbe, wie bei dem Sector, und wird durch die Formeln 6. 7 — 12 berechnet.

Zusatz 2.

Die Formeln 13 — 16 haben aufser ihrer verwickelten Gestalt noch den besonderen Nachtheil, dafs sie sich bei näherer Betrachtung, als zu dem irreducibeln Falle der Cardan'schen Formel gehörig zeigen. Die unter dem Quadratwurzelzeichen

befindliche Gröſse wird jederzeit eine unmögliche Gestalt annehmen, obgleich der gesuchte Werth wirklich möglich ist. Bei der Anwendung auf bestimmte Fälle, wird es daher nöthig seyn, sich der ursprünglichen Gleichungen zu bedienen und diese durch eine der Näherungsmethoden aufzulösen.

Es sind folgende:

$$13.\quad f^3 - 3rf^2 + \frac{3G}{\pi} = 0$$

$$14.\quad t^6 + 3r^2t^4 - \frac{12\,Gr^3\pi - 9\,G^2}{\pi^2} = 0$$

$$15.\quad q^3 - 3r^2q - \frac{3G - 2r^3\pi}{\pi} = 0$$

$$16.\quad \cos^3 \tfrac{1}{2}\alpha - 3\cos \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{3G - 2r^3\pi}{r^3\pi} = 0$$

Zusatz 3.

Wenn gegeben ist der körperliche Inhalt eines sphärischen Sectors $= C$
der körperliche Inhalt des demselben correspondirenden sphärischen Segments $= G$
so wird der Radius der Kugel, zu welcher diese Theile gehören, ausgedrückt durch:

$$r = \sqrt[3]{\left(3C \,.\, \frac{3C \mp \sqrt{C(9C - 8G)}}{8\pi G}\right)}$$

Zusatz 4.

Wenn von einem Kugelsegment ein Stück durch eine senkrechte Ebene abgeschnitten wird, deren Abstand von der Mitte der Grundfläche des Segments $= a$ ist, während diese Mitte von dem Mittelpunkte der Kugel um b absteht, so ist der körperliche Inhalt dieses Stücks

$$= \tfrac{2}{3}\,abp + \tfrac{2}{3}\,r^3 \,.\, arc\,tang\,\frac{rp}{ab} - \tfrac{1}{3}\,b\,(3r^2 - b^2) \,.\, arc\,tang\,\frac{p}{a} - \tfrac{1}{3}\,a\,(3r^2 - a^2) \,.\, arc\,tang\,\frac{p}{b},$$

wo p die Abkürzungsformel

$$\sqrt{(r^2 - a^2 - b^2)}$$

bedeutet.

d) Die sphärische Zone.

Bei einem zwischen zwei parallelen Durchschnittskreisen enthaltenen Kugelstücke sei:

der körperliche Inhalt	$= Z$
die sphärische Seitenfläche	$= P$
die ganze Oberfläche	$= H$
die Radien der beiden Grundflächen	$= m$ und n
deren senkrechter Abstand oder die Dicke der Zone	$= e$
der Abstand der Mitte der gröfsten Grundfläche vom Mittelpunkte der Kugel	$= q$
der Radius der Kugel	$= r$

Gegeben:	Gesucht:
1. $r, e, q;$	$Z = \pi e\left(r^2 - q^2 - qe - \frac{1}{3}e^2\right)$
2. $m, n, e;$	$Z = \frac{1}{6}\pi e\left(3m^2 + 3n^2 + e^2\right)$
3. $r, e;$	$P = 2re\pi$
4. $r, q, n;$	$P = 2r\pi\left[\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}n^2\right)} - q\right]$
5. $m, n, e;$	$P = e\pi\sqrt{\left[8r^2 - m^2 - n^2 + 2\sqrt{m^2n^2 - 4r^2\left(m^2 + n^2 - 4r^2\right)}\right]}$
6. $r, e, m, n;$	$H = \pi\left(re + m^2 + n^2\right)$
7. $r, m, n, q;$	$H = \pi\left[r\sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}n^2\right)} - rq + m^2 + n^2\right]$

Zusatz.

Wenn von einer Kugelzone durch eine senkrechte Ebene ein Stück abgeschnitten wird, so entsteht beistehende Figur.

In derselben sei:

der Radius der Kugel	$= r$
der Abstand der gröfseren Grundfläche vom Mittelpunkte, oder AB	$= b$
der Abstand der kleineren Grundfläche vom Mittelpunkte, oder AC	$= c$
der Abstand der Durchschnittsebene von der Axe der Zone, oder BD	$= a$

Zur Abkürzung bedeute ferner:

$$p = \sqrt{(r^2 - a^2 - b^2)} \quad \text{(Werth der Linie FD)}$$

und $$q = \sqrt{(r^2 - a^2 - c^2)} \quad \text{(Werth der Linie GK)}$$

so ist der körperliche Inhalt des Abschnittes ausgedrückt durch:

$$V = \tfrac{1}{3} c\,(3r^2 - c^2)\,.\,arc\ tang\,\frac{q}{a} - \tfrac{1}{3} b\,(3r^2 - b^2)\,.\,arc\ tang\,\frac{p}{a} + \tfrac{1}{6} a\,(a^2 + 3r^2)\,.$$

$$.\left(arc\ tang\,\frac{b}{p} - arc\ tang\,\frac{c}{q}\right) + \tfrac{2}{3} r^3 \left(arc\ tang\,\frac{ac}{rq} - arc\ tang\,\frac{ab}{rp}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} a\,(r^2 - a^2)\,.\left(arc\ tang\,\frac{q}{c} - arc\ tang\,\frac{p}{b}\right) + \tfrac{2}{3} a\,(bp - cq)$$

und die krumme Wandfläche des Abschnitts:

$$F = 2r\left[c\,.\,arc\ tang\,\frac{q}{a} + r\,.\,arc\ tang\,\frac{ac}{rq} - a\,.\,arc\ tang\,\frac{c}{q} - b\,.\,arc\ tang\,\frac{p}{a} -\right.$$

$$\left. - r\,.\,arc\ tang\,\frac{ab}{rp} + a\,.\,arc\ tang\,\frac{b}{p}\right]$$

(Für die Ableitung dieser Formeln siehe Lehmus Aufgaben aus der Körperlehre 88 — 94.)

Verschiedenartige Körper, welche aus der Drehung von Kreisabschnitten entstehen.

A) Ringförmige Körper.

Wenn ein Kreis sich um einen Punkt dreht, welcher in der erweiterten Ebene dieses Kreises liegt, so beschreibt er einen ringförmigen Körper.

Bei diesem ringförmigen Körper sei:

der körperliche Inhalt des Ganzen $= V$

die Oberfläche desselben $= F$

der Radius des erzeugenden Kreises $= r$

der Abstand AB der Mitte dieses Kreises, von der Mitte des Ringes $= a$

so ist: $V = 2\pi^2 r^2 a$
$F = 4\pi^2 ra$

Zusatz.

Wenn sich statt des ganzen Kreises, nur das Segment ECD um den Punkt B dreht, so sei für den entstehenden Körper:

der Abstand der Sehne von der Mitte des Kreises GB $= m$
die halbe Sehne des Segments GD $= q$
der körperliche Inhalt $= V'$
die sphärische Fläche des Ringstückes $= F'$,

und es ist:

$$1.\quad V' = 2\pi\left[ma\sqrt{(r^2-m^2)} + r^2 a \,.\, arc\sin\frac{m}{r} - \tfrac{2}{3}\sqrt{(r^2-m^2)^3} \mp \tfrac{2}{3}r^3\right]$$

oder:

$$2.\quad V' = 2\pi\left[maq + r^2 a \,.\, arc\sin\frac{m}{r} \mp \tfrac{2}{3}(r^3 - q^3)\right]$$

und

$$3.\quad F' = 2\pi r\left[a \,.\, arc\sin\frac{m}{a} \mp \sqrt{(r^2-m^2)} \pm r\right]$$

Anmerkung. In den drei letzten Formeln gilt das untere Zeichen, wenn der Punkt G, wie in der Figur, jenseits des Mittelpunktes A liegt, das obere hingegen, wenn der Punkt G zwischen A und B fällt.

B) Die sphärische Spindel.

Wenn sich ein Kreissegment um seine Sehne dreht, so entsteht ein Körper, dessen Cubikinhalt bezeichnet werde durch $= V$

seine sphärische Oberfläche $= O$
die Sehne des Segments $= a$
deren Abstand vom Mittelpunkte des Kreises $= q$
der Pfeil des Segments $= f$
der Radius des Kreises $= r$

Gegeben:	Gesucht:
1. r, q;	$V = \frac{2}{3}\pi(2r^2+q^2)\,.\,\sqrt{(r^2-q^2)} - 2r^2 q\pi \,.\, arc\cos\frac{q}{r}$
2. r, a;	$V = \frac{1}{3}a\pi(3r^2 - \frac{1}{4}a^2) - 2r^2\pi \,.\, \sqrt{(r^2-\frac{1}{4}a^2)} \,.\, arc\cos\frac{\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}a^2)}}{r}$

3. r, f; $V = \frac{2}{3}\pi \sqrt{[(2r-f).f]} . (3r^2 - 2rf + f^2) - 2r^2\pi (r-f) . arc\ cos \frac{r-f}{r}$

4. r, q; $O = 4r\pi \left[\sqrt{(r^2-q^2)} - q\ arc\ cos \frac{q}{r}\right]$

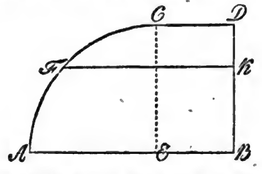
5. r, a; $O = 4r\pi \left[\frac{1}{2}a - \sqrt{(r^2-\frac{1}{4}a^2)} . arc\ cos \frac{\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}a^2)}}{r}\right]$

6. r, f; $O = 4r\pi \left[\sqrt{(2r-f)f} - (r-f) . arc\ cos \frac{r-f}{r}\right]$

Anmerkung. Ausführliche Untersuchungen über Körper dieser Art finden sich in *Cavaleri Geomet. indiv. cont. pag.* 100 ff.

C) Körper, welche aus der Drehung eines convexen Kreisbogen entstehen.

In beistehender Figur ist ACE ein Quadrant und CDBE ein Rectangel.



Es sei ferner:

der Radius des Quadranten AE $= a$

die Breite des Rectangels EB $= b$

a) Wenn sich die ganze Fläche ACDB um die Linie DB dreht, so wird der körperliche Inhalt des entstehenden Körpers ausgedrückt durch:

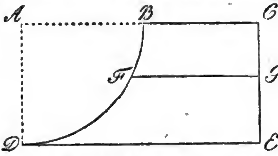
$$V = \pi (\tfrac{2}{3}a^3 + ab^2 + \tfrac{1}{2}a^2 b)$$

b) Wenn sich hingegen nur die Fläche AFKB um die Linie KB dreht, so ist der körperliche Inhalt des entstehenden Körpers:

$$V = \pi m (a^2 + b^2) + \pi bm \sqrt{(a^2 - m^2)} + \pi a^2 b . arc\ sin \frac{m}{a} - \tfrac{1}{3}\pi m^3$$

wo die Linie BK $= m$ gesetzt ist.

D) Körper, welche aus der Drehung concaver Bogen entstehen.



Der Bogen BD sei ein Quadrant,

dessen Radius AB $= a$

die Linie BC $= b$

a) Wenn sich die ganze Figur BCED um die Axe CE dreht, so hat der entstehende Körper den Inhalt:

$$V = \pi a \left[\tfrac{5}{3}a^2 + 2ab + b^2 - \tfrac{1}{2}(a^2 + ab)\pi\right]$$

b) Wenn sich hingegen nur das Profil BCFG um die Axe CG dreht, so ist der Inhalt des entstehenden Körpers ausgedrückt durch:

$$V = \pi m(2a^2 + 2ab + b^2) - (a + b) \cdot \pi m \cdot \sqrt{(a^2 - m^2)} - \pi(a^3 + a^2 b)\, arc\, sin \frac{m}{a} - \tfrac{1}{3}\pi m^3$$

wo die Linie CG $= m$ gesetzt ist.

Anmerkung. Untersuchungen über ähnliche, für die Berechnung der Geschützröhre wichtige Körper, finden sich bei Leonhardi 3ter Band, Abth. VI.

E) Körper, welche die Gestalt eines Fasses darstellen.

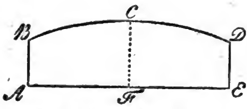
Wenn sich das Profil ABCDE um die Axe AE dreht, so entsteht ein Körper von der Gestalt eines gewöhnlichen Fasses.

Bei diesem Körper sei:

der Durchmesser der Mitte des Fasses (= 2 CF) $= D$

der Durchmesser des Bodens (= 2 AB) $= d$

die Länge des Fasses AE $= a$



a) Wenn es bei der Berechnung des körperlichen Inhalts eines Fasses nur auf eine ungefähre Annäherung ankömmt, so kann dieselbe durch folgende beide Formeln erlangt werden:

$$1.\quad V = \frac{(2D^2 + d^2)\, a\pi}{12}$$

$$2.\quad V = \left(\frac{2D + d}{6}\right)^2 a\pi$$

Von diesen Formeln giebt die erste den körperlichen Inhalt etwas zu grofs, die zweite etwas zu klein an.

Das arithmetische Mittel zwischen beiden ist:

$$3.\quad V = \frac{a\pi}{36}(5D^2 + 2Dd + 2d^2)$$

b) Wird die Curve BCD als ein Kreisbogen angesehen, so ist:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\left[a^3 + \frac{3ad^2}{2} + \frac{3a(a^2 - D^2 + d^2).[a^2 - (D-d)^2]}{8(D-d)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{3[a^2 + (D-d)^2]^2.(a^2 - D^2 + d^2)}{16(D-d)^3}.\,arc\,sin\,\frac{4a(D-d)}{a^2 + (D-d)^2}\right]$$

c) Wird die Curve BCD (die Krümmung der Fafs-Dauben) als parabolischer Bogen angesehen, so ist:

$$V = \tfrac{1}{15}\pi a\left(\frac{3d^2}{4} + Dd + 2D^2\right)$$

d) Ist hingegen der Bogen BCD conchoidisch, so wird:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi D^2\left[\frac{2D^2 + d^2}{8a^2}.\sqrt{(D^2 - d^2)} + \frac{3ad - 3d.\sqrt{(D^2 - d^2)}}{2\sqrt{(D^2 - d^2)}}.\,arc\,cos\,\frac{d}{D}\right]$$

(Siehe über die Ableitung dieser Formel: Lehmus Aufgaben aus der Körperlehre 108 ff.)

Als Annäherungsformel für denselben Zweck dient:

$$V = \pi\left[\frac{aD^2}{4} + \left(\frac{2D}{3} - \frac{3(D-d)}{15} + \frac{3(D-d)^2}{112D}\right).2(D-d).\sqrt{(D-d)D}\right]$$

(Siehe Müller, Versuch den Inhalt der Fässer, durch Anwendung der Muschellinie zu finden.)

Zweite Abtheilung.

Formeln zur Trigonometrie und Goniometrie.

Erster Abschnitt.

Formeln zur Auflösung der ebenen und sphärischen Dreiecke.

I. Formeln für ebene Dreiecke.

A) Auflösung der rechtwinklichen ebenen Dreiecke.

In einem rechtwinklichen ebenen Dreiecke sei:

die Hypothenuse $= h$
die beiden Katheten $= a$ und b
die beiden spitzen Winkel $= \alpha$ und β

so dafs $\angle\ \alpha$ der Kathete a, und $\angle\ \beta$ der Kathete b gegenübersteht.

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
a) die Katheten a und b	die Hypothenuse	1. $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
	der $\angle\ \alpha$	2. $tang\ \alpha = \frac{a}{b}$ oder 3. $cot\ \alpha = \frac{b}{a}$
	der $\angle\ \beta$	4. $tang\ \beta = \frac{b}{a}$ oder 5. $cot\ \beta = \frac{a}{b}$
b) die Hypothenuse h eine Kathete a	die zweite Kathete	6. $b = \sqrt{(h^2 - a^2)} = \sqrt{(h + a)(h - a)}$
	der gegenüberliegende $\angle\ \alpha$	7. $sin\ \alpha = \frac{a}{h}$
	der anliegende $\angle\ \beta$	8. $cos\ \beta = \frac{a}{h}$

c) die Hypothenuse h ein Winkel α	der $\angle\ \beta$	9. $\beta = 90^0 - \alpha$
	die gegenüberstehende Kathete	10. $a = h \sin \alpha$
	die anliegende Kathete	11. $b = h \cos \alpha$
d) eine Kathete a der anliegende Winkel β	der $\angle\ \alpha$	12. $\alpha = 90^0 - \beta$
	die Hypothenuse	13. $h = \frac{a}{\cos \beta}$
	die zweite Kathete	14. $b = a \operatorname{tang} \beta$
e) eine Kathete a der gegenüberliegende Winkel α	der $\angle\ \beta$	15. $\beta = 90^0 - \alpha$
	die Hypothenuse	16. $h = \frac{a}{\sin \alpha}$
	die zweite Kathete	17. $b = a \cot \alpha$

B) Auflösung der gleichschenklichen ebenen Dreiecke.

In einem gleichschenklichen ebenen Dreiecke sei:

die Grundlinie $= a$
jede der beiden gleichen Seiten $= b$
der Winkel an der Spitze $= \alpha$
jeder der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie $= \beta$

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
a) die Grundlinie a eine der Seitenlinien b	der $\angle$ an der Spitze α	1. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{2b}{a}$
	der $\angle$ an der Grundlinie β	2. $\cos \beta = \frac{2b}{a}$
b) die Grundlinie a der $\angle$ an der Spitze α	die Seitenlinie	3. $b = \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2}\alpha$
	der $\angle$ an der Grundlinie β	4. $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$
c) die Grundlinie a ein Winkel an der Grundlinie β	der $\angle$ an der Spitze α	5. $\alpha = 180^0 - 2\beta$
	jede Seitenlinie b	6. $b = \frac{1}{2} a \cos \beta$

d) eine Seitenlinie b der Winkel an der Spitze α	jeder $\angle$ an der Grundlinie	7. $\beta = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$
	die Grundlinie	8. $a = 2b \sin \frac{1}{2}\alpha$
e) eine Seitenlinie b ein Winkel an der Grundlinie β	der $\angle$ an der Spitze	9. $\alpha = 180^0 - 2\beta$
	die Grundlinie	10. $a = 2b \cos \beta$

C) Auflösung der ungleichseitigen ebenen Dreiecke.

In jedem ebenen Dreiecke sind die Seiten bezeichnet mit a, b, c;
die Winkel mit α, β, γ;

und zwar so, dafs der $\angle\ \alpha$ der Seite a
der $\angle\ \beta$ — b
der $\angle\ \gamma$ — c gegenüberliegt.

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
a) drei Seiten a, b und c	der $\angle\ \alpha$	1. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ oder
		2. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}}$ oder
		3. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}}$ oder
		4. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}}$ oder
		5. $\sin a = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}}$ oder
		6. $\sin a = \frac{\sqrt{S.(S-2a)(S-2b)(S-2c)}}{2bc}$ wo die Summe aller drei Seiten $a+b+c = S$ gesetzt ist.
	der $\angle\ \beta$	7. $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ oder
		8. $\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{ac}}$ oder

		9. $\cos \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{ac}}$ oder 10. $\mathit{tang}\, \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}}$ oder 11. $\sin \beta = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2c^2}}$ oder 12. $\sin \beta = \frac{\sqrt{S.(S-2a)(S-2b)(S-2c)}}{2ac}$
	der $\angle \gamma$	13. $\cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ oder 14. $\sin \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{ab}}$ oder 15. $\cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$ oder 16. $\mathit{tang}\, \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+b-c)}}$ oder 17. $\sin \gamma = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2b^2}}$ oder 18. $\sin \gamma = \frac{\sqrt{S.(S-2a)(S-2b)(S-2c)}}{2ab}$
b) zwei Seiten a und c der eingeschlossene $\angle \beta$ unter der Annahme, dafs $a > c$	der $\angle \alpha$	19. $\mathit{tang}\, \alpha = \frac{a \sin \beta}{c - a \cos \beta}$ oder 20. wenn $\angle \frac{\alpha+\gamma}{2}$ $(= 90^\circ - \frac{1}{2}\beta) = \varphi$ angenommen und $\angle \frac{\alpha-\gamma}{2}$ $= \psi$ genannt wird, so ist: $\mathit{tang}\, \psi = \frac{a-c}{a+c} . \cot \frac{1}{2}\beta$ und dann ferner: $\angle \alpha = \varphi + \psi$
	der $\angle \beta$	21. $\mathit{tang}\, \beta = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$ oder 22. unter obigen Voraussetzungen: $\angle \beta = \varphi - \psi$

	die dritte Seite b	23. $b = \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \, . \, \cos\beta)}$ oder 24. $b = \sqrt{(4ac \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta + (a - c)^2)}$ oder wenn obige beiden ∠ zuvor berechnet sind, 25. $b = \dfrac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$ und 26. $b = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$
c) zwei Seiten a und c ein gegenüberliegender ∠ α unter der Annahme, dafs $a > c$	der zweite gegenüberliegende ∠ γ	27. $\sin\gamma = \dfrac{c \sin\alpha}{\alpha}$
	der eingeschlossene ∠ β	28. $\sin\beta = \dfrac{c \sin^2\alpha - \cos\alpha \, . \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2\alpha)}}{a}$ oder 29. wenn der ∠ γ bereits gefunden ist: ∠ $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$
	die dritte Seite b	30. $b = c \cos\alpha + \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2\alpha)}$ oder wenn die ∠ γ und β bereits gefunden sind, so ist: 31. $b = \dfrac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha}$ oder 32. $b = \dfrac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$
d) zwei ∠ α und β die zwischenliegende Seite c	der dritte ∠ γ	33. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$
	die Seite a	34. $a = \dfrac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$
	die Seite b	35. $b = \dfrac{c \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$
e) zwei ∠ α und β eine gegenüberliegende Seite b	der dritte ∠ γ	36. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$
	die zwischenliegende Seite c	37. $c = \dfrac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$
	die gegenüberliegende Seite a	38. $a = \dfrac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$

D) Ausdrücke für die Linien und Winkel in ebenen Dreiecken durch Reihen.

Es kann zuweilen vortheilhaft seyn, in einem Dreiecke die Seiten und Winkel, unabhängig von den trigonometrischen Funktionen, unmittelbar durch unendliche Reihen darzustellen. Hierzu dienen folgende Formeln, in welchen die Zahl der Grade, Minuten, Secunden u. s. w. eines Winkels stets durch α, β u. s. w. ausgedrückt ist. Die Gröfse μ bezeichnet den Winkel von 57°,2957795, dessen Bogen bekanntlich dem Radius gleich ist. $\frac{\alpha}{\mu}$ oder $\frac{\beta}{\mu}$ ist daher immer die Länge des Bogens α oder β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt.

a) Reihen für das rechtwinkliche Dreieck.

In einem rechtwinklichen Dreieck sei die Hypothenuse $= h$
die beiden Katheten $=$ a und b
die denselben gegenüberliegenden $\angle$ $= \alpha$ und β

1) Gegeben: die Hypothenuse a und die $\angle$ α und β, so ist:

$$a = c\left[\frac{\alpha}{\mu} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^7 + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

$$a = c\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^6 + \ldots\right]$$

2) Gegeben: die Hypothenuse h und eine Kathete a, so ist:

$$\alpha = \mu\left[\frac{a}{h} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{h}\right)^3 + \frac{3}{2.4.5}\left(\frac{a}{h}\right)^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7}\left(\frac{a}{h}\right)^7 + \ldots\right]$$

$$b = h - a\left[\tfrac{1}{2}.\frac{a}{h} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{a}{h}\right)^3 + \frac{3}{2.4.6}\left(\frac{a}{h}\right)^5 + \frac{3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{h}\right)^7 + \ldots\right]$$

Setzt man in beiden Reihen statt a die Kathete b, so werden die Ausdrücke für β und a erhalten.

3) Gegeben: eine Kathete a und die $\angle$ α und β, so ist:

$$h = a\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^2 + \frac{5}{24}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^4 + \frac{61}{720}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^6 + \frac{277}{8064}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^8 + \ldots\right]$$

$$b = a\left[\frac{\beta}{\mu} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^7 + \frac{62}{2835}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^9 + \ldots\right] \quad \text{oder auch}$$

$$b = a\left[\frac{\mu}{\alpha} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) - \frac{1}{45}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 - \frac{2}{945}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^5 - \frac{1}{4725}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^7 + \ldots\right]$$

4) Gegeben: beide Katheten a und b, so ist:

$$\alpha = \mu \left[\frac{a}{b} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{b}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{a}{b}\right)^9 - \ldots\right] \quad \text{oder auch}$$

$$\alpha = 90^0 - \mu \left[\frac{b}{a} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{b}{a}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{b}{a}\right)^9 - \ldots\right]$$

(Dieselben Formeln geben den $\angle\,\beta$, wenn man b mit a, und a mit b, in beiden verwechselt.)

$$h = a + b\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2.4}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{3}{2.4.6}\left(\frac{b}{a}\right)^5 + \frac{3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{b}{a}\right)^7 + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

$$h = b + a\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2.4}\left(\frac{a}{b}\right)^5 + \frac{3}{2.4.6}\left(\frac{a}{b}\right)^5 + \frac{3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{b}\right)^7 + \ldots\right]$$

b) Reihen für schiefwinkliche Dreiecke überhaupt.

In einem Dreiecke sind die drei Seiten $= a$, b und c
die denselben gegenüberliegenden $\angle$ $= \alpha$, β und γ

1) Gegeben: eine Seite a und die Winkel des Dreiecks, so ist:

$$b = a\left[\frac{\frac{\beta}{\mu} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^5 - \ldots}{\frac{\alpha}{\mu} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^5 - \ldots}\right] \quad \text{oder}$$

$$b = a\left[\frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{90^0 - \beta}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{90^0 - \beta}{\mu}\right)^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{90^0 - \beta}{\mu}\right)^6 + \ldots}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{90^0 - \alpha}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{90^0 - \alpha}{\mu}\right)^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{90^0 - \alpha}{\mu}\right)^6 + \ldots}\right]$$

Beide Formeln geben Werthe für die dritte Seite c, sobald man statt β den $\angle\,\gamma$ in die Reihen setzt.

2) Gegeben: zwei Seiten a und b, und ein gegenüberliegender $\angle\,\beta$, so ist:

$$c = b + a - b\left[\frac{b+a}{2a}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 + \frac{3\,(b^3 + a^3) - 4a^2\,(b+a)}{2.3.4a^3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^4 + \ldots\right] \quad \text{oder}$$

$$c = b - a - b\left[\frac{b-a}{2a}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 + \frac{3\,(b^3 - a^3) - 4a^2\,(b-a)}{2.3.4\,a^3}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$\alpha = \frac{a}{b}\,\mu\left[\frac{\beta}{\mu} - \frac{b^2 - a^2}{2.3\,b^2}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^3 + \frac{(b^2 - a^2)^2 - 8a^2\,(b^2 - a^2)}{2.3.4.5\,b^4}\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^5 - \ldots\right]$$

$$\gamma = \frac{b+a}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) - \frac{3b^2 + 4ab + a^2}{2.3\,a^2}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 + \frac{30\,a^2 b^2 - 16\,a^3 b + a^4 - 15\,b^4}{2.3.4.5\,a^4}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^5 - \ldots\right]$$

oder

$$\gamma = \frac{b-a}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) + \frac{3b^2-4ab+a^2}{2.3\,a^2}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^3 + \frac{15\,b^4+16\,a^3b-30\,a^2b^2-a^4}{2.3.4.5\,a^4}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^5 + \ldots\right]$$

3) Gegeben: zwei Seiten a und b, und der eingeschlossene $\angle\,\gamma$, so ist:

$$c = \sqrt{(a-b)^2 - ab\left[\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{3.4}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^4 + \frac{1}{3.4.5.6}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^6 - \ldots\right]} \quad \text{oder}$$

$$c = (a+b)\cdot\left[1 - \frac{ab}{2\,(a+b)^2}\cdot\left(\frac{180^0-\gamma}{\mu}\right)^2 - \frac{3a^2b^2+ab\,(a+b)^2}{2.3.4\,(a+b)^4}\cdot\left(\frac{180^0-\gamma}{\mu}\right)^4 - \ldots\right]$$

(Die erste dieser Reihen gilt, wenn γ kleiner als 90^0, die zweite, wenn γ größer als 90^0 ist.)

$$\alpha = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma + \mu\cdot\frac{a-b}{a+b}\left[\frac{2\mu}{\gamma} - \frac{1.\gamma}{2.3\mu} - \frac{1}{8.45}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^3 - \ldots\right] -$$

$$- \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\left[\frac{2\mu}{\gamma} - \frac{1.\gamma}{2.3\mu} - \frac{1}{8.45}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^3 - \ldots\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^5\left[\frac{2\mu}{\gamma} - \frac{1.\gamma}{2.3\mu} - \frac{1}{8.45}\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^3 - \ldots\right] - \text{u. s. w.}$$

oder

$$\alpha = 90^0 - \tfrac{1}{2}\gamma + \mu\cdot\frac{a-b}{a+b}\left[\frac{90^0-\frac{1}{2}\gamma}{\mu} - \frac{2\,(a^2+b^2)}{3\,(a+b)^2}\cdot\left(\frac{90^0-\frac{1}{2}\gamma}{\mu}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{11\,(a^2+b^2)+4a^2b^2}{3.5\,(a+b)^4}\cdot\left(\frac{90^0-\frac{1}{2}\gamma}{\mu}\right)^5 - \ldots\right]$$

(Es ist vorausgesetzt, dafs a $>$ b sei; findet der umgekehrte Fall statt, so mufs überall b statt a gesetzt werden.)

4) Gegeben: die drei Seiten a, b und c; so ist:

$$\gamma = \mu\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2.3.4.5.6}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^6 + \ldots\right]$$

Die Formeln für α und β sind der gegebenen Reihe gleich, sobald in derselben

für α der Factor $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ und

für β der Factor $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

statt des Factors $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ in die Formel eingeführt worden ist.

E) Zusammenstellung sämmtlicher analytischer Ausdrücke für die sechs Theile eines Dreiecks.

a) Werthe für die Seite *a*.

Ausgedrückt durch:

1. c, $\sin\alpha$, $\sin\gamma$; $\quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$
2. b, $\sin\alpha$, $\sin\beta$; $\quad - = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$
3. c, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\cot\alpha$; $\quad - = \frac{c}{\cos\beta + \sin\beta \cdot \cot\alpha}$
4. b, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\cot\alpha$; $\quad - = \frac{b}{\cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cot\alpha}$
5. c, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\cot\gamma$; $\quad - = c \cdot \cos\beta + c \cdot \sin\beta \cdot \cot\gamma$
6. b, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\cot\beta$; $\quad - = b \cdot \cos\gamma + b \cdot \sin\gamma \cdot \cot\beta$
7. b, c, $\cos\alpha$; $\quad - = \sqrt{(c^2 + b^2 - 2c \cdot b \cdot \cos\alpha)}$
8. b, c, $\sin\beta$, $\cos\beta$; $\quad - = c \cdot \cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \cdot \sin^2\beta)}$
9. b, c, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad - = b \cdot \cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \cdot \sin^2\gamma)}$

b) Werthe für die Seite *b*.

Ausgedrückt durch:

10. a, $\sin\alpha$, $\sin\beta$; $\quad b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$
11. c, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; $\quad - = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$
12. a, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\cot\beta$; $\quad - = \frac{a}{\cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cot\beta}$
13. c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\beta$; $\quad - = \frac{c}{\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cot\beta}$
14. a, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\cot\alpha$; $\quad - = a \cdot \cos\gamma + a \cdot \sin\gamma \cdot \cot\alpha$
15. c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\gamma$; $\quad - = c \cdot \cos\alpha + c \cdot \sin\alpha \cdot \cot\gamma$
16. a, c, $\cos\beta$; $\quad - = \sqrt{(c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cdot \cos\beta)}$
17. a, c, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad - = a \cdot \cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot \sin^2\gamma)}$
18. a, c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; $\quad - = c \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \cdot \sin^2\alpha)}$

c) Werthe für die Seite *c*.

Ausgedrückt durch:

19. b, *sin* β, *sin* γ; $c = \frac{b \,.\, \sin\gamma}{\sin\beta}$

20. a, *sin* α, *sin* γ; $- = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha}$

21. b, *sin* α, *cos* α, *cot* γ; $- = \frac{b}{\cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \cot\gamma}$

22. a, *sin* β, *cos* β, *cot* γ; $- = \frac{a}{\cos\beta + \sin\beta \,.\, \cot\gamma}$

23. b, *sin* α, *cos* α, *cot* β; $- = b \,.\, \cos\alpha + b \,.\, \sin\alpha \,.\, \cot\beta$

24. a, *sin* β, *cos* β, *cot* α; $- = a \,.\, \cos\beta + a \,.\, \sin\beta \,.\, \cot\alpha$

25. a, b, *cos* γ; $- = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma)}$

26. a, b, *sin* α, *cos* α; $- = b \,.\, \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \,.\, \sin^2\alpha)}$

27. a, b, *sin* β, *cos* β; $- = a \,.\, \cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \,.\, \sin^2\beta)}$

d) Werthe für die Funktionen des Winkels α.

aa) *Sinus* von α.

Ausgedrückt durch:

28. a, b, *sin* β; $\sin\alpha = \frac{a \,.\, \sin\beta}{b}$

29. a, c, *sin* γ; $- = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{c}$

30. *sin* β, *sin* γ; $- = \sin(\beta + \gamma)$

31. *sin* β, *cos* β, *sin* γ, *cos* γ; $- = \sin\gamma \,.\, \cos\beta + \cos\gamma \,.\, \sin\beta$

32. a, c, *sin* β, *cos* β; $- = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sqrt{(c^2 + a^2 - 2ac \,.\, \cos\beta)}}$

33. a, b, *sin* γ, *cos* γ; $- = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma)}}$

34. a, b, c; $- = \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$

35. b, c, *sin* β, *cos* β; $- = \frac{\sin\beta\,(c \,.\, \cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \,.\, \sin^2\beta})}{b}$

36. b, c, *sin* γ, *cos* γ; $- = \frac{\sin\gamma\,(b \,.\, \cos\gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2 \,.\, \sin^2\gamma})}{c}$

bb) *Cosinus* von α.

Ausgedrückt durch:

37. a, b, $\sin\beta$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{(b^2 - a^2 . \sin^2\beta)}}{b}$

38. a, c, $\sin\gamma$; $\quad - = \dfrac{\pm\sqrt{(c^2 - a^2 . \sin^2\gamma)}}{c}$

39. $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\quad - = -\cos(\beta + \gamma)$

40. $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad - = \sin\beta . \sin\gamma - \cos\beta . \cos\gamma$

41. a, c, $\cos\beta$; $\quad - = \dfrac{c - a . \cos\beta}{\sqrt{(c^2 + a^2 - 2ac . \cos\beta)}}$

42. a. b, $\cos\gamma$; $\quad - = \dfrac{b - a . \cos\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab . \cos\gamma)}}$

43. a, b, c; $\quad - = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

44. b, c, $\sin\beta$, $\cos\beta$; $\quad - = \dfrac{c . \sin^2\beta \mp \cos\beta \sqrt{(b^2 - c^2 . \sin^2\beta)}}{b}$

45. b, c, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad - = \dfrac{b . \sin^2\gamma \mp \cos\gamma \sqrt{(c^2 - b^2 . \sin^2\gamma)}}{c}$

cc) *Tangente* von α.

Ausgedrückt durch:

46. a, b, $\sin\beta$; $\quad \tan\alpha = \dfrac{a . \sin\beta}{\pm\sqrt{(b^2 - a^2 . \sin^2\beta)}}$

47. a, c, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; $\quad - = \dfrac{a . \sin\beta}{\pm\sqrt{(c^2 - a^2 . \sin^2\gamma)}}$

48. $\tan\beta$, $\tan\gamma$; $\quad - = -\tan(\beta + \gamma)$

49. $\tan\beta$, $\tan\gamma$; $\quad - = \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{\tan\beta . \tan\gamma - 1}$

50. a, c, $\sin\beta$, $\cos\beta$; $\quad - = \dfrac{a . \sin\beta}{c - a . \cos\beta}$

51. a, b, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad - = \dfrac{a . \sin\gamma}{b - a . \cos\gamma}$

52. a, b, c; $\quad - = \pm\sqrt{\left(\dfrac{2bc}{c^2 + b^2 - a^2}\right)^2 - 1}$

53. b, c, *sin* β, *cos* β, *cot* β; $tang\,\alpha = \frac{c \, . \, cos\,\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \, . \, sin^2\beta)}}{c \, . \, sin\,\beta \mp cot\,\beta \sqrt{(b^2 - c^2 \, . \, sin^2\beta)}}$

54. b, c, *sin* γ, *cos* γ, *cot* γ; $- = \frac{b \, . \, cos\,\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \, . \, sin^2\gamma)}}{b \, . \, sin\,\gamma \mp cot\,\gamma \sqrt{(c^2 - b^2 \, . \, sin^2\gamma)}}$

e) Werthe für die Funktionen des Winkels β.

aa) *Sinus* von β.

Ausgedrückt durch:

55. b, c, *sin* γ; $sin\,\beta = \frac{b \, . \, sin\,\gamma}{c}$

56. a, b, *sin* α; $- = \frac{b \, . \, sin\,\alpha}{a}$

57. *sin* α, *sin* γ; $- = sin\,(\alpha + \gamma)$

58. *sin* α, *cos* α, *sin* γ, *cos* γ; $- = sin\,\gamma \, . \, cos\,\alpha + cos\,\gamma \, . \, sin\,\alpha$

59. a, b, *sin* γ, *cos* γ; $- = \frac{b \, . \, sin\,\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \, . \, cos\,\gamma)}}$

60. b, c, *sin* α, *cos* α; $- = \frac{b \, . \, sin\,\alpha}{\sqrt{(c^2 + b^2 - 2bc \, . \, cos\,\alpha)}}$

61. a, b, c; $- = \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)^2}$

62. a, c, *sin* γ, *cos* γ; $- = \frac{sin\,\gamma\,(a \, . \, cos\,\gamma \pm \sqrt{c^2 - a^2 \, . \, sin^2\gamma})}{c}$

63. a, c, *sin* α, *cos* α; $- = \frac{sin\,\alpha\,(c \, . \, cos\,\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \, . \, sin^2\alpha})}{a}$

bb) *Cosinus* von β.

Ausgedrückt durch:

64. b, c, *sin* γ; $cos\,\beta = \frac{\pm \sqrt{(c^2 - b^2 \, . \, sin^2\gamma)}}{c}$

65. a, b, *sin* α; $- = \frac{\pm \sqrt{(a^2 - b^2 \, . \, sin^2\alpha)}}{a}$

66. *cos* α, *cos* γ; $- = -\,cos\,(\alpha + \gamma)$

67. *sin* α, *cos* α, *sin* γ, *cos* γ; $- = sin\,\alpha \, . \, sin\,\gamma - cos\,\alpha \, . \, cos\,\gamma$

68. a, b, *cos* γ; $- = \frac{a - b \, . \, cos\,\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \, . \, cos\,\gamma)}}$

69. b, c, $\cos\alpha$; $\cos\beta = \frac{c - b \cdot \cos\alpha}{\sqrt{(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha)}}$

70. a, b, c; $\quad = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2bc}$

71. a, c, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad = \frac{a \cdot \sin^2\gamma \mp \cos\gamma \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot \sin^2\gamma)}}{c}$

72. a, c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; $\quad = \frac{c \cdot \sin^2\alpha \mp \cos\alpha \sqrt{(a^2 - c^2 \cdot \sin^2\alpha)}}{a}$

cc) *Tangente* von β.

Ausgedrückt durch:

73. b, c, $\sin\gamma$; $\tan\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\pm\sqrt{(c^2 - b^2 \cdot \sin^2\gamma)}}$

74. a, b, $\sin\alpha$; $\quad = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\pm\sqrt{(a^2 - b^2 \cdot \sin^2\alpha)}}$

75. $\tan\alpha$, $\tan\gamma$; $\quad = -\tan(\alpha + \gamma)$

76. $\tan\alpha$, $\tan\gamma$; $\quad = \frac{\tan\alpha + \tan\gamma}{\tan\alpha \cdot \tan\gamma - 1}$

77. a, b, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$; $\quad = \frac{b \cdot \sin\gamma}{a - b \cdot \cos\gamma}$

78. b, c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; $\quad = \frac{b \cdot \sin\alpha}{c - b \cdot \cos\alpha}$

79. a, b, c; $\quad = \pm\sqrt{\left(\frac{2ac}{c^2 + a^2 - b^2}\right)^2 - 1}$

80. a, c, $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, $\cot\gamma$; $\quad = \frac{a \cdot \cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot \sin^2\gamma)}}{a \cdot \sin\gamma \mp \cot\gamma \sqrt{(c^2 - a^2 \cdot \sin^2\gamma)}}$

81. a, c, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$; $\quad = \frac{c \cdot \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \cdot \sin^2\alpha)}}{c \cdot \sin\alpha \mp \cot\alpha \sqrt{(a^2 - c^2 \cdot \sin^2\alpha)}}$

f) Werthe für die Funktionen des Winkels γ.

aa) *Sinus* von γ.

Ausgedrückt durch:

82. a, c, $\sin\alpha$; $\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$

83. b, c, $\sin\beta$; $\quad = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$

84. $\sin\alpha,\ \sin\beta;$ $\quad \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$

85. $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\beta;$ $\quad - = \sin\beta\,.\,\cos\alpha + \cos\beta\,.\,\sin\alpha$

86. $b,\ c,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha;$ $\quad - = \dfrac{c\,.\,\sin\alpha}{\sqrt{(c^2+b^2-2bc\,.\,\cos\alpha)}}$

87. $a,\ c,\ \sin\alpha,\ \cos\beta;$ $\quad - = \dfrac{c\,.\,\sin\alpha}{\sqrt{(c^2+a^2-2ac\,.\,\cos\beta)}}$

88. $a,\ b,\ c;$ $\quad - = \sqrt{1-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$

89. $a,\ b,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha;$ $\quad - = \dfrac{\sin\alpha\,(b\,.\,\cos\alpha \pm \sqrt{a^2-b^2\,.\,\sin^2\alpha})}{a}$

90. $a,\ b,\ \sin\beta,\ \cos\beta;$ $\quad - = \dfrac{\sin\beta\,(a\,.\,\cos\beta \pm \sqrt{b^2-a^2\,.\,\sin^2\beta})}{b}$

bb) *Cosinus* von γ.

Ausgedrückt durch:

91. $a,\ c,\ \sin\alpha;$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{\pm\sqrt{(a^2-c^2\,.\,\sin^2\alpha)}}{a}$

92. $b,\ c,\ \sin\beta;$ $\quad - = \dfrac{\pm\sqrt{(b^2-c^2\,.\,\sin^2\beta)}}{b}$

93. $\cos\alpha,\ \cos\beta;$ $\quad - = -\cos(\alpha+\beta)$

94. $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\beta;$ $\quad - = \sin\alpha\,.\,\sin\beta - \cos\alpha\,.\,\cos\beta$

95. $b,\ c,\ \cos\alpha;$ $\quad - = \dfrac{b-c\,.\,\cos\alpha}{\sqrt{(c^2+b^2-2bc\,.\,\cos\alpha)}}$

96. $a,\ c,\ \cos\beta;$ $\quad - = \dfrac{a-c\,.\,\cos\beta}{\sqrt{(c^2+a^2-2ac\,.\,\cos\beta)}}$

97. $a,\ b,\ c;$ $\quad - = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

98. $a,\ b,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha;$ $\quad - = \dfrac{b\,.\,\sin^2\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{(a^2-b^2\,.\,\sin^2\alpha)}}{a}$

99. $a,\ b,\ \sin\beta,\ \cos\beta;$ $\quad - = \dfrac{a\,.\,\sin^2\beta \mp \cos\beta\sqrt{(b^2-a^2\,.\,\sin^2\beta)}}{b}$

cc) *Tangente* von γ.

Ausgedrückt durch:

100. a, c, $sin\,\alpha$; $\quad tang\,\gamma = \dfrac{c\,.\,sin\,\alpha}{\pm\sqrt{(a^2 - c^2\,.\,sin^2\,\alpha)}}$

101. b, c, $sin\,\beta$; $\quad - = \dfrac{c\,.\,sin\,\beta}{\pm\sqrt{(b^2 - c^2\,.\,sin^2\,\beta)}}$

102. $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$; $\quad - = -\,tang\,(\alpha+\beta)$

103. $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$; $\quad - = \dfrac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta - 1}$

104. b, c, $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$; $\quad - = \dfrac{c\,.\,sin\,\alpha}{b - c\,.\,cos\,\alpha}$

105. a, c, $sin\,\beta$, $cos\,\beta$; $\quad - = \dfrac{c\,.\,sin\,\beta}{a - c\,.\,cos\,\beta}$

106. a, b, c; $\quad - = \pm\sqrt{\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}\right)^2 - 1}$

107. a, b, $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $cot\,\alpha$; $\quad - = \dfrac{b\,.\,cos\,\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2\,.\,sin^2\,\alpha)}}{b\,.\,sin\,\alpha \mp cot\,\alpha\sqrt{(a^2 - b^2\,.\,sin^2\,\alpha)}}$

108. a, b, $sin\,\beta$, $cos\,\beta$, $cot\,\beta$; $\quad - = \dfrac{a\,.\,cos\,\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2\,.\,sin^2\,\beta)}}{a\,.\,sin\,\beta \mp cot\,\beta\sqrt{(b^2 - a^2\,.\,sin^2\,\beta)}}$

E) Formeln für die Veränderungen in einem ebenen Dreiecke, wenn einzelne Seiten oder Winkel in demselben sich verändern.

a) Zwei Theile des Dreiecks werden als constant angesehen.

Wenn in einem ebenen Dreiecke zwei Theile, Seiten oder Winkel, als unveränderlich anzusehen sind, so wird der Einflufs, welchen eine sehr kleine Veränderung eines dritten Theiles auf die übrigen Seiten oder Winkel ausübt, durch folgende Annäherungsformeln dargestellt.

Die unendlich kleinen Veränderungen (Differentiale) der Seiten oder Winkel sind dabei durch ∂a, $\partial \alpha$ u. s. w. ausgedrückt; letztere müssen bei der wirklichen Berechnung stets zuvor durch die bekannten Mittel in Kreisbogen für den Radius = 1 verwandelt werden.

aa) Erster Fall.

Eine Seite a
ein anliegender Winkel β } werden als constant angenommen.

1) Wenn die, dem constanten Winkel gegenüberliegende Seite b. sich verändert um ∂b, so wird:

$$\partial c = \partial b \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \partial b \cdot \sec\alpha$$

$$\partial\alpha = \partial b \cdot \frac{\tang\alpha}{b}$$

$$\partial\gamma = \partial b \cdot \frac{\tang\alpha}{b}$$

2) Wenn die, dem constanten Winkel anliegende Seite c. sich verändert um ∂c, so wird:

$$\partial b = \partial c \cdot \cos\alpha$$

$$\partial\alpha = \partial c \cdot \frac{\sin\alpha}{b}$$

$$\partial\gamma = \partial c \cdot \frac{\sin\alpha}{b}$$

3) Wenn der, der constanten Seite gegenüberliegende Winkel α, sich verändert um $\partial\alpha$, so wird:

$$\partial b = \partial\alpha \cdot \frac{b}{\tang\alpha} = \partial\alpha \cdot b \cot\alpha$$

$$\partial c = \partial\alpha \cdot \frac{b}{\sin\alpha} = \partial\alpha \cdot b \operatorname{cosec}\alpha$$

$$\partial\gamma = -\partial\alpha$$

4) Wenn der, der constanten Seite anliegende Winkel γ, sich verändert um $\partial\gamma$, so wird:

$$\partial b = \partial\gamma \cdot \frac{b}{\tang\alpha} = \partial\gamma \cdot b \cot\alpha$$

$$\partial c = \partial\gamma \cdot \frac{b}{\sin\alpha} = \partial\gamma \cdot b \operatorname{cosec}\alpha$$

$$\partial\alpha = -\partial\gamma$$

bb) Zweiter Fall.

Eine Seite a
der gegenüberliegende Winkel α } werden als constant angenommen.

1) Wenn eine, dem constanten Winkel anliegende Seite b. sich um ∂b verändert, so ist:

$$\partial c = \partial b \, . \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} = \partial b \, . \cos\gamma \, . \sec\beta$$

$$\partial\beta = \partial b \, . \frac{b}{tang\,\beta} = \partial b \, . \, b \cot\beta$$

$$\partial\gamma = \partial b \, . \frac{b}{tang\,\beta} = \partial b \, . \, b \cot\beta$$

2) Wenn die andere, dem constanten Winkel anliegende Seite c, sich um ∂c verändert, so ist:

$$\partial b = \partial c \, . \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \partial c \, . \cos\beta \, . \sec\gamma$$

$$\partial\beta = \partial c \, . \frac{c}{tang\,\gamma} = \partial c \, . \, c \cot\gamma$$

$$\partial\gamma = \partial c \, . \frac{c}{tang\,\gamma} = \partial c \, . \, c \cot\gamma$$

3) Wenn einer, der an der constanten Seite anliegenden Winkel β, sich um $\partial\beta$ verändert, so wird:

$$\partial b = \partial\beta \, . \frac{b}{tang\,\beta} = \partial\beta \, . \, b \cot\beta$$

$$\partial c = \partial\beta \, . \frac{c}{tang\,\gamma} = \partial\beta \, . \, c \cot\gamma$$

$$\partial\gamma = -\partial\beta$$

4) Wenn der andere, an der constanten Seite anliegende Winkel γ, sich um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

$$\partial b = \partial\gamma \, . \frac{b}{tang\,\beta} = \partial\gamma \, . \, b \cot\beta$$

$$\partial c = \partial\gamma \, . \frac{c}{tang\,\gamma} = \partial\gamma \, . \, b \cot\gamma$$

$$\partial\beta = -\partial\gamma$$

cc) Dritter Fall.

Die Seite a }
die Seite b } werden als constant angenommen.

1) Wenn sich die dritte Seite c um ∂c verändert, so wird:

$$\partial\alpha = \partial c \, . \frac{\cot\beta}{c}$$

$$\partial\beta = \partial c \cdot \frac{\cot\alpha}{c}$$

$$\partial\gamma = \partial c \cdot \frac{1}{b \sin\alpha} = \partial c \cdot \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{b}$$

2) Wenn sich ein Winkel α, welcher einer der constanten Seiten gegenüberliegt, verändert um $\partial\alpha$, so wird:

$$\partial c = \partial\alpha \cdot \frac{c}{\cot\beta} = \partial\alpha \cdot c \tan\beta$$

$$\partial\beta = \partial\alpha \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \partial\alpha \cdot \cot\alpha \cdot \tan\beta$$

$$\partial\gamma = \partial\alpha \cdot \frac{c}{a \cos\beta} = \partial\alpha \cdot \frac{c \sec\beta}{a}$$

3) Wenn sich der Winkel β, welcher der anderen constanten Seite gegenüberliegt, um $\partial\beta$ verändert, so wird:

$$\partial c = \partial\beta \cdot \frac{c}{\cot\alpha} = \partial\beta \cdot c \tan\alpha$$

$$\partial\alpha = \partial\beta \cdot \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \partial\beta \cdot \tan\alpha \cdot \cot\beta$$

$$\partial\gamma = \partial\beta \cdot \frac{c}{b \cos\alpha} = \partial\beta \cdot \frac{c \sec\alpha}{b}$$

4) Wenn sich der Winkel γ, welcher keiner der constanten Seiten gegenüberliegt, um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

$$\partial c = \partial\gamma \cdot \frac{1}{a \sin\beta} = \partial\gamma \cdot \frac{1}{b \sin\alpha}$$

$$\partial\alpha = \partial\gamma \cdot \frac{a \cos\beta}{c}$$

$$\partial\beta = \partial\gamma \cdot \frac{b \cos\alpha}{c}$$

b) Es wird nur ein Theil des Dreiecks als constant angesehen.

In diesem Falle ist es nothwendig, die Veränderungen zweier Theile des Dreiecks zu kennen, um die aller anderen Theile daraus bestimmen zu können.

Der constante Theil des Dreiecks werde, ohne Rücksicht darauf, ob Seite oder Winkel, bezeichnet durch A.

Der erste der gegebenen veränderlichen Theile, sei bezeichnet durch B.

Der zweite der veränderlichen, durch C.

Man betrachte zuerst aufser A auch B als constant, und suche durch die vorstehenden Formeln den Einflufs, welchen die Veränderung von C auf irgend einen der übrigen Theile des Dreiecks hat.

Man betrachte ferner aufser A nunmehr auch C als constant, und suche den Einflufs, welchen die Veränderung von B auf jenen Theil des Dreiecks ausübt.

Die Summe oder Differenz dieser beiden Resultate ist der Einflufs, welchen beide Veränderungen von B und C zusammen, für den in Frage stehenden Theil des Dreiecks geben.

Eine nähere Betrachtung an der Figur zeigt dabei, ob diese Resultate beide vermehrend oder beide vermindernd, oder auch entgegengesetzt auf die gesuchte Veränderung wirken.

c) Es wird **kein** Theil des Dreiecks als constant, sondern alle als veränderlich angesehen.

Es ist dann nothwendig, **drei** Veränderungen im Dreiecke zu kennen, um die der übrigen Theile zu erfahren.

Der erste der gegebenen veränderlichen Theile sei bezeichnet durch A, der zweite durch B, der dritte durch C.

Man betrachte zuerst A und B als constant, und suche den Einflufs der Veränderung von C auf irgend einen der übrigen Theile des Dreiecks.

Man betrachte A und C als constant, und suche den Einflufs von B auf denselben Theil.

Man betrachte B und C als constant, und suche den Einflufs von A.

Diese drei Resultate, additiv oder subtractiv gehörig verbunden, stellen die gesammte Veränderung des Theiles im Dreiecke dar.

Zusätze.

1) Wenn in einem rechtwinklichen Dreiecke der Unterschied zwischen der Hypothenuse h und der gröfseren Kathete a nur sehr gering ist, so kann derselbe ausgedrückt werden, durch die Hälfte des Quadrats der kleineren Kathete, dividirt durch die Hypothenuse:

$$h - a = \frac{b^2}{2h}$$

2) Bei einem sehr kleinen Bogen, ist der *Sinus versus,* als gleich der Hälfte des Quadrats dieses Bogens anzunehmen:

$$sin\,vers\,\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi^2$$

3) Bei einem sehr kleinen Bogen, ist der Ueberschufs der Secante über den Radius, gleich der Hälfte des Quadrats desselben Bogens:

$$1 - sec\,\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi^2$$

Man kann demnach diesen Ueberschufs, als gleich dem *Sinus versus* des Bogens annehmen.

II. Formeln für sphärische Dreiecke.

A) Auflösung der rechtwinklichen sphärischen Dreiecke.

In einem rechtwinklichen sphärischen Dreiecke sei:

die Hypothenuse $= h$
die beiden Katheten $= a$ und b
die denselben gegenüberstehenden Winkel $= \alpha$ und β

so dafs $\angle\ \alpha$ der Kathete a, und $\angle\ \beta$ der Kathete b gegenüber steht.

Man bezeichne ferner den Begriff des Gleichartigen bei Seiten und Winkeln mit glchtg; den Begriff des Ungleichartigen mit unglchtg; so dafs a glchtg b bedeutet, dafs, wenn a gröfser als 90°, auch b gröfser als 90° ist, und umgekehrt. Und eben so bedeutet h unglchtg a, dafs, wenn h gröfser als 90°, dagegen a kleiner als 90° sei.

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
a) die Hypothenuse (h) eine Kathete (a)	die andere Kathete b der gegenüberliegende ∠ α der anliegende ∠ β	1. $\cos b = \frac{\cos h}{\cos a}$ 2. $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin h}$ 3. $\cos \beta = \tang \alpha \cot h$
b) die Hypothenuse (h) ein ∠ (α)	die gegenüberliegende Kathete a die anliegende Kathete b der andere ∠ β	4. $\sin a = \sin h \sin \alpha$ 5. $\tang b = \tang h \cos \alpha$ 6. $\cot \beta = \cos h \tang \alpha$
c) eine Kathete (a) der anliegende ∠ (β)	die Hypothenuse h die andere Kathete b der gegenüberliegende ∠ α	7. $\cot h = \cot a \cos \beta$ 8. $\tang b = \tang \beta \sin a$ 9. $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$
d) eine Kathete (a) der gegenüberliegende ∠ (α)	die Hypothenuse h die andere Kathete b der anliegende ∠ β	10. $\sin h = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$ 11. $\sin b = \tang a \cot \alpha$ 12. $\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$
e) beide Katheten (a und b)	die Hypothenuse h der Winkel α der Winkel β	13. $\cos h = \cos a \cos b$ 14. $\cot \alpha = \cot a \sin b$ 15. $\cot \beta = \cot b \sin a$
f) beide Winkel (α und β)	die Hypothenuse h die Kathete a die Kathete b	16. $\cos h = \cot \alpha \cot \beta$ 17. $\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ 18. $\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$

Der gesuchte ∠ oder Seite ist gröfser als 90°, wenn	Der gesuchte ∠ oder Seite ist kleiner als 90°, wenn
h unglchtg a $a > 90^\circ$ h unglchtg a	h glchtg a $a < 90^\circ$ h glchtg a
$\alpha > 90^\circ$ h unglchtg α h unglchtg α	$\alpha < 90^\circ$ h glchtg α h glchtg α
$\beta > 90^\circ$ a unglchtg β $a > 90^\circ$	$\beta < 90^\circ$ a glchtg β $a < 90^\circ$

Aus den gegebenen beiden Elementen kann hier nicht ausgemittelt werden, ob die, durch die Formeln 10. 11. 12. gefundenen Stücke, gröfser oder kleiner als 90° sind.

a unglchtg b $a > 90^\circ$ $b > 90^\circ$.	a glchtg b $a < 90^\circ$ $b < 90^\circ$
α unglchtg β $\alpha > 90^\circ$ $\beta > 90^\circ$	α glchtg β $\alpha < 90^\circ$ $\beta < 90^\circ$

Zusatz.

Wenn die durch vorstehende Formeln zu bestimmenden unbekannten Theile eines Dreiecks als *Sinus* oder *Cosinus* von Bogen, die nahe an 0 oder 90° liegen, erscheinen, so giebt der Gebrauch dieser Formeln bei gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln keine Sicherheit für die Resultate.

Es ist dann nothwendig, die gesuchten Theile des Dreiecks durch Ausdrücke zu bestimmen, in welchen diese als *Tangenten* oder *Cotangenten* vorkommen, wozu folgende Formeln dienen:

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
h, a	b	1. $tang\,\frac{1}{2}b = \sqrt{tang\,\frac{1}{2}(h-a)\,.\,tang\,\frac{1}{2}(h+a)}$
	α	2. $tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = \mp\sqrt{\frac{tang\,(h+a)}{tang\,(h-a)}}$ (siehe Anmerkung 1.)
	β	3. $tang\,\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{sin\,(h-a)}{sin\,(h+a)}}$
h, α	a	4. $sin\,a = \frac{1}{2}cos\,(h-\alpha) - \frac{1}{2}cos\,(h+\alpha)$ (siehe Anmerkung 2.)
	b	5. $tang\,b = tang\,h\,.\,cos\,\alpha$
	β	6. $cot\,\beta = cos\,h\,.\,tang\,\alpha$
a, β	h	7. $cot\,h = cot\,a\,.\,cot\,\beta$
	b	8. $tang\,b = tang\,\beta\,.\,cos\,\alpha$
	α	9. $cos\,\beta = \frac{1}{2}sin\,(a+\alpha) \pm \frac{1}{2}sin\,(a-\alpha)$ (siehe Anmerk. 2 und 3.)
a, α	h	10. $tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}h) = \sqrt{\frac{tang\,\frac{1}{2}(\alpha+a)}{tang\,\frac{1}{2}(\alpha-a)}}$
	b	11. $tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}b) = \sqrt{\frac{sin\,\frac{1}{2}(\alpha+a)}{sin\,\frac{1}{2}(\alpha-a)}}$
	β	12. $tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{cot\,\frac{1}{2}(\alpha+a)}{tang\,\frac{1}{2}(\alpha-a)}}$
a, b	h	13. $cos\,h = \frac{1}{2}cos\,(a+b) + \frac{1}{2}cos\,(a-b)$
	α	14. $cot\,\alpha = cot\,\alpha\,.\,sin\,b$
	β	15. $cot\,\beta = cot\,b\,.\,sin\,a$
α, β	h	16. $tang\,\frac{1}{2}h = \sqrt{-\frac{cos\,(\alpha+\beta)}{cos\,(\alpha-\beta)}}$ (siehe Anmerkung 4.)
	a	17. $tang\,a = tang\,h\,.\,cos\,\beta$
	b	18. $tang\,b = tang\,h\,.\,cos\,\alpha$

Anmerkungen. 1) In Formel 2. wird für die *Tangente* das Zeichen + oder — nach der Regel angenommen, dafs der zu findende ∠ α gleichartig mit der Seite a sein mufs.

2) Die Formeln 4. 9. 13. sind durch die natürlichen Funktionen der Winkel zu berechnen.

3) In Formel 9. gilt das Zeichen + wenn α gröfser als a ist, im umgekehrten Falle gilt das Zeichen —.

4) In Formel 16. ist die Gröfse unter dem Wurzelzeichen stets positiv, weil $\alpha + \beta$ jederzeit gröfser als 90° ist.

B) Auflösung der schiefwinklichen sphärischen Dreiecke überhaupt.

In einem schiefwinklichen sphärischen Dreiecke heifsen
die drei Seiten — a, b und c
die drei Winkel, so wie sie den gleichnamigen Seiten gegenüberstehen — α, β und γ

Gegeben:	Gesucht:	Formel:
a) die drei Seiten (a, b und c)	ein ∠ α (der Seite a gegenüberliegend)	1. $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ oder 2. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \cdot \sin c}\right)}$ oder 3. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}\right)}$ oder 4. $\cos\alpha = \frac{\cos(a+\varphi)}{\sin b \cdot \sin c \cdot \cos\varphi}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $\tang\varphi = \frac{\cos b \cdot \cos c}{\sin a}$
b) zwei Seiten (b und c) und der eingeschlossene ∠ α	die dritte Seite a	5. $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$ oder 6. $\cot\frac{1}{2}a = \frac{\cot\frac{1}{2}(b-c) \cdot \cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$ oder 7. $\cos a = \frac{\cos c \cdot \sin(b+\varphi)}{\sin\varphi}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $\cot\varphi = \tang c \cdot \cos\alpha$

	der $\angle\,\beta$ (der Seite b gegenüberliegend)	8. $cot\,\beta = \frac{sin\,c\,.\,cot\,b - cos\,\alpha\,.\,cos\,c}{sin\,\alpha}$ oder 9. $tang\,\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{cot\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,cos\,\frac{1}{2}(b-c)}{cos\,\frac{1}{2}(b+c)}$ und $tang\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{cot\,\frac{1}{2}\alpha\,.\,sin\,\frac{1}{2}(b-c)}{sin\,\frac{1}{2}(b+c)}$ wo dann $\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$ oder 10. $tang\,\beta = \frac{tang\,\alpha\,.\,cos\,\varphi}{cos\,(c+\varphi)}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $cot\,\varphi = tang\,b\,.\,cos\,\alpha$
c) zwei Seiten (b und c) und ein gegenüberliegender $\angle\,\gamma$	die dritte Seite a	11. $tang\,\frac{1}{2}a = \frac{cos\,\gamma\,.\,sin\,c \mp \sqrt{(sin^2 c - sin^2\gamma\,.\,sin^2 b)}}{sin\,\gamma\,.\,sin\,(b+c)}$ oder 12. $sin\,(a+\varphi) = \frac{cos\,c\,.\,sin\,\varphi}{cos\,b}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $cot\,\varphi = cos\,\gamma\,.\,tang\,b$
	der eingeschlossene $\angle\,\alpha$	13. $tang\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{cos\,\gamma\,.\,sin\,c \mp \sqrt{(sin^2 c - sin^2\gamma\,.\,sin^2 b)}}{sin\,\gamma\,.\,sin\,(b+c)}$ oder 14. $sin\,(\alpha+\varphi) = tang\,b\,.\,cot\,c\,.\,sin\,\varphi$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $tang\,\varphi = tang\,\gamma\,.\,cos\,b$
	der $\angle\,\beta$ (der Seite b gegenüberliegend)	15. $sin\,\beta = \frac{sin\,b\,.\,sin\,\gamma}{sin\,c}$ Um zu erkennen, ob der $\angle\,\beta$ gröfser oder kleiner als 90°, gilt folgendes: $\beta < 90^\circ$; wenn $\gamma < 90^\circ$ und $b < c$ $\beta < 90^\circ$; wenn $\gamma > 90^\circ$ und $b < 90^\circ$ und $c < (180^\circ - b)$ $\beta > 90^\circ$; wenn $\gamma > 90^\circ$ und $b > c$ $\beta > 90^\circ$; wenn $\gamma < 90^\circ$ und $b > 90^\circ$ und $c > (180^\circ - b)$

		In allen übrigen, nicht in obigen vier, begriffenen Fällen, bleibt es unbestimmbar, ob der gefundene $sin\,\beta$ zu einem ∠ gehöre, der gröſser oder kleiner als 90° ist.
d) die drei Winkel (α, β, γ)	die Seite a (dem ∠ α gegenüberliegend)	16. $cos\,a = \frac{cos\,\alpha + cos\,\beta\,.\,cos\,\gamma}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}$ oder 17. $cos\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\,.\,cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}\right)}$ oder 18. $sin\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,cos\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma}\right)}$ oder 19. $cos\,a = \frac{sin\,(\alpha+\varphi)}{sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma\,.\,sin\,\varphi}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, daſs $cot\,\varphi = \frac{cos\,\beta\,.\,cos\,\gamma}{sin\,\alpha}$
e) zwei Winkel (β und γ) und die zwischenliegende Seite (a)	der dritte ∠ α	20. $cos\,\alpha = cos\,\mathrm{a}\,.\,sin\,\beta\,.\,sin\,\gamma - cos\,\beta\,.\,cos\,\gamma$ oder 21. $cos\,\alpha = \frac{cos\,\beta\,.\,cos\,(\gamma+\varphi)}{cos\,\varphi}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, daſs $tang\,\varphi = cos\,\mathrm{a}\,.\,tang\,\beta$
	die Seite b (dem ∠ β gegenüberliegend)	22. $cot\,b = \frac{cot\,\beta\,.\,sin\,\gamma + cos\,\mathrm{a}\,.\,cos\,\gamma}{sin\,\mathrm{a}}$ oder 23. $tang\,b = \frac{tang\,\alpha\,.\,sin\,\varphi}{sin\,(\gamma+\varphi)}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, daſs $tang\,\varphi = cos\,\mathrm{a}\,.\,tang\,\beta$ oder 24. $tang\,\frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2} = \frac{tang\,\frac{1}{2}\mathrm{a}\,.\,cos\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{cos\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$ und $tang\,\frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{2} = \frac{tang\,\frac{1}{2}\mathrm{a}\,.\,sin\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{sin\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$ wo dann $b = \frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2} + \frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{2}$

f) zwei Winkel (β und γ) und eine gegenüberliegende Seite (b).	die zwischenliegende Seite a	25. $tang\,\frac{1}{2}\,a = \frac{\sin\beta\,.\,\cos b \mp \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\gamma\,.\,\sin^2 b)}}{\sin b\,.\,\sin(\gamma-\beta)}$ oder 26. $\sin(a-\varphi) = \cot\beta\,.\,tang\,\gamma\,.\,\sin\varphi$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $tang\,\varphi = \cos\gamma\,.\,tang\,\beta$.
	der dritte $\angle\,\alpha$	27. $tang\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{\cos b\,.\,\sin\gamma \mp \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\gamma\,.\,\sin^2 b)}}{\cos\beta - \cos\gamma}$ oder 28. $\sin(\alpha-\varphi) = \frac{\sin\varphi\,.\,\cos\beta}{\cos\gamma}$ wo der Hülfswinkel φ so angenommen ist, dafs $\cot\varphi = \cos b\,.\,tang\,\gamma$
	die Seite c (dem $\angle\,\gamma$ gegenüberliegend)	29. $\sin c = \frac{\sin\gamma\,.\,\sin b}{\sin\beta}$ Um zu erkennen, ob die Seite c gröfser oder kleiner als 90° sein mufs, gilt folgendes: $c < 90°$; wenn $b < 90°$ und $\beta > \gamma$ $c < 90°$; wenn $b > 90°$ und $\beta < (180° - \gamma)$ und $\gamma < 90°$ $c > 90°$; wenn $b > 90°$ und $\beta < \gamma$ $c > 90°$; wenn $b < 90°$ und $\beta > (180° - \gamma)$ und $\gamma > 90°$ In allen nicht hierin begriffenen Fällen ist nicht zu bestimmen, ob die gefundene Seite c ein Bogen von mehr oder weniger als 90° sei.

C) Zusammenstellung sämmtlicher analytischer Ausdrücke für die sechs Theile eines sphärischen Dreiecks.

a) Allgemeine Gleichungen.

aa) Relation zwischen zwei Winkeln und den beiden ihnen gegenüberstehenden Seiten.

$$\left.\begin{array}{ll}1. & \sin a\,.\,\sin\beta = \sin b\,.\,\sin\alpha \\ 2. & \sin a\,.\,\sin\gamma = \sin c\,.\,\sin\alpha \\ 3. & \sin b\,.\,\sin\gamma = \sin c\,.\,\sin\beta\end{array}\right\}$$

bb) Relation zwischen drei Seiten und einem Winkel.

$$\left.\begin{array}{ll} 4. & \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ 5. & \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \\ 6. & \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \end{array}\right\}$$

cc) Relation zwischen drei Winkeln und einer Seite.

$$\left.\begin{array}{ll} 7. & \cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \\ 8. & \cos \beta = -\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos b \\ 9. & \cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c \end{array}\right\}$$

dd) Relation zwischen drei Seiten und zwei Winkeln.

$$\left.\begin{array}{ll} 10. & \sin a \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos \alpha \\ 11. & \sin a \cdot \cos \gamma = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos \alpha \\ 12. & \sin b \cdot \cos \alpha = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta \\ 13. & \sin b \cdot \cos \gamma = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta \\ 14. & \sin c \cdot \cos \alpha = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma \\ 15. & \sin c \cdot \cos \beta = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos \gamma \end{array}\right\}$$

ee) Relation zwischen zwei Winkeln und zwei Seiten, wovon eine anliegend, die andere gegenüberliegend.

$$\left.\begin{array}{ll} 16. & \sin a \cdot \sin \beta \cdot \cot \alpha = \cos a \cdot \sin c - \cos \beta \cdot \sin a \cdot \cos c \\ 17. & \sin a \cdot \sin \gamma \cdot \cot \alpha = \cos a \cdot \sin b - \cos \gamma \cdot \sin a \cdot \cos b \\ 18. & \sin b \cdot \sin \alpha \cdot \cot \beta = \cos b \cdot \sin c - \cos \alpha \cdot \sin b \cdot \cos c \\ 19. & \sin b \cdot \sin \gamma \cdot \cot \beta = \cos b \cdot \sin a - \cos \gamma \cdot \sin b \cdot \cos a \\ 20. & \sin c \cdot \sin \alpha \cdot \cot \gamma = \cos c \cdot \sin b - \cos \alpha \cdot \sin c \cdot \cos b \\ 21. & \sin c \cdot \sin \beta \cdot \cot \gamma = \cos c \cdot \sin a - \cos \beta \cdot \sin c \cdot \cos a \\ 22. & \sin \alpha \cdot \sin b \cdot \cot a = \cos \alpha \cdot \sin \gamma - \cos b \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma \\ 23. & \sin \alpha \cdot \sin c \cdot \cot a = \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ 24. & \sin \beta \cdot \sin a \cdot \cot b = \cos \beta \cdot \sin \gamma - \cos a \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma \\ 25. & \sin \beta \cdot \sin c \cdot \cot b = \cos \beta \cdot \sin \alpha - \cos c \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ 26. & \sin \gamma \cdot \sin a \cdot \cot c = \cos \gamma \cdot \sin \beta - \cos a \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ 27. & \sin \gamma \cdot \sin b \cdot \cot c = \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \cos b \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha \end{array}\right\}.$$

b) Formeln für den logarithmischen Gebrauch.

Erstes System.

Zwei Winkel und die beiden correspondirenden Seiten.

1. $\sin\alpha = \dfrac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin b} = \dfrac{\sin a \,.\, \sin\gamma}{\sin c}$

2. $\sin\beta = \dfrac{\sin b \,.\, \sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin b \,.\, \sin\gamma}{\sin c}$

3. $\sin\gamma = \dfrac{\sin c \,.\, \sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin c \,.\, \sin\beta}{\sin b}$

4. $\sin a = \dfrac{\sin b \,.\, \sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c \,.\, \sin\alpha}{\sin\gamma}$

5. $\sin b = \dfrac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin c \,.\, \sin\beta}{\sin\gamma}$

6. $\sin c = \dfrac{\sin a \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b \,.\, \sin\gamma}{\sin\beta}$

Zweites System.

Ein Winkel durch drei Seiten.

7. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \,.\, \sin c}}$

8. $\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \,.\, \sin c}}$

9. $\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \,.\, \sin b}}$

10. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \,,\, \sin c}}$

11. $\cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \,.\, \sin c}}$

12. $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \,.\, \sin b}}$

13. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}$

14. $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}}$

$$15.\quad tang\,\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}$$

$$16.\quad \cot\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}$$

$$17.\quad \cot\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}$$

$$18.\quad \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}}$$

Drittes System.

Eine Seite durch drei Winkel.

$$19.\quad \sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}$$

$$20.\quad \sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma}}$$

$$21.\quad \sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}}$$

$$22.\quad \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\beta\,.\,\sin\gamma}}$$

$$23.\quad \cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\alpha\,.\,\sin\gamma}}$$

$$24.\quad \cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}}$$

$$25.\quad tang\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}}$$

$$26.\quad tang\,\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}}$$

$$27.\quad tang\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}}$$

$$28.\quad \cot\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}}$$

$$29.\quad \cot\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}}$$

$$30.\quad \cot\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}}$$

Viertes System.

Zwei Seiten durch die beiden correspondirenden Winkel und die dritte Seite.

$$31.\quad tang\,\frac{b-a}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}c\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

$$32.\quad tang\,\frac{b+a}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}c\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

$$33.\quad tang\,\frac{a-c}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$$

$$34.\quad tang\,\frac{a+c}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$$

$$35.\quad tang\,\frac{b-c}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$36.\quad tang\,\frac{b+c}{2} = tang\,\tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

Fünftes System.

Zwei Winkel durch die beiden correspondirenden Seiten und den dritten Winkel.

$$37.\quad tang\,\frac{\beta-\alpha}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\gamma\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$38.\quad tang\,\frac{\beta+\alpha}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\gamma\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$39.\quad tang\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$40.\quad tang\,\frac{\alpha+\gamma}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$41.\quad tang\,\frac{\beta-\gamma}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}$$

$$42.\quad tang\,\frac{\beta+\gamma}{2} = cot\,\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}$$

Sechstes System.

Eine Seite durch die beiden andern Seiten und deren correspondirende Winkel.

$$43.\quad tang\,\tfrac{1}{2}c = tang\,\tfrac{1}{2}(b-a)\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$= tang\,\tfrac{1}{2}(b+a)\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$$

$$44.\quad \tang \tfrac{1}{2} b = \tang \tfrac{1}{2}(a-c) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}$$

$$= \tang \tfrac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}$$

$$45.\quad \tang \tfrac{1}{2} a = \tang \tfrac{1}{2}(b-c) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$

$$= \tang \tfrac{1}{2}(b+c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}$$

$$46.\quad \cot \tfrac{1}{2} c = \cot \tfrac{1}{2}(b-a) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2}(b+a) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\cos \frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$$

$$47.\quad \cot \tfrac{1}{2} b = \cot \tfrac{1}{2}(a-c) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2}(a+c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$$

$$48.\quad \cot \tfrac{1}{2} a = \cot \tfrac{1}{2}(b-c) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2}(b+c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$

Siebentes System.

Ein Winkel durch die beiden andern Winkel und deren correspondirende Seiten.

$$49.\quad \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \tang . \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(b+a)}{\sin \frac{1}{2}(b-a)}$$

$$= \tang . \frac{\beta+\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(b+a)}{\cos \frac{1}{2}(b-a)}$$

$$50.\quad \cot \tfrac{1}{2}\beta = \tang . \frac{\alpha-\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c)}{\sin \frac{1}{2}(a-c)}$$

$$= \tang . \frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a+c)}{\cos \frac{1}{2}(a-c)}$$

$$51.\quad \cot \tfrac{1}{2}\alpha = \tang . \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}(b-c)}$$

$$= \tang . \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(b-c)}$$

$$52. \quad \tan \tfrac{1}{2}\gamma = \cot . \frac{\beta-\alpha}{2} . \frac{\sin \frac{1}{2}(b-a)}{\sin \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$= \cot . \frac{\beta+\alpha}{2} . \frac{\cos \frac{1}{2}(b-a)}{\cos \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$53. \quad \tan \tfrac{1}{2}\beta = \cot . \frac{\alpha-\gamma}{2} . \frac{\sin \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+c)}$$

$$= \cot . \frac{\alpha+\gamma}{2} . \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)}$$

$$54. \quad \tan \tfrac{1}{2}\alpha = \cot . \frac{\beta-\gamma}{2} . \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b+c)}$$

$$= \cot . \frac{\beta+\gamma}{2} . \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}$$

D) Relation sphärischer Dreiecke mit den ihnen entsprechenden Sehnen-Dreiecken.

In einem sphärischen Dreiecke sind die drei Seiten a, b und c
die drei Winkel α, β und γ

In dem dazu gehörigen Sehnen-Dreiecke sind die correspondirenden Seiten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$
die drei Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$

In beiden Dreiecken stehen die Winkel gleichnamigen Seiten gegenüber.

a) Bestimmung der Seiten des Sehnen-Dreiecks aus den Seiten des sphärischen Dreiecks und umgekehrt.

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \mathfrak{A} = 2 \sin \frac{1}{2} a \\ 2. & \mathfrak{B} = 2 \sin \frac{1}{2} b \\ 3. & \mathfrak{C} = 2 \sin \frac{1}{2} c \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 4. & \sin \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \mathfrak{A} \quad \text{oder} & \cos a = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{A}^2 \\ 5. & \sin \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \quad \text{oder} & \cos b = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{B}^2 \\ 6. & \sin \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \mathfrak{C} \quad \text{oder} & \cos c = 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{C}^2 \end{array}\right\}$$

b) Bestimmung der Winkel des sphärischen Dreiecks aus den Seiten des Sehnen-Dreiecks.

$$1.\quad \cos\alpha = \frac{2\mathfrak{B}^2 + 2\mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sqrt{(4-\mathfrak{B}^2)}\,.\sqrt{(4-\mathfrak{C}^2)}}$$

$$2.\quad \cos\beta = \frac{2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{C}^2 - 2\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\sqrt{(4-\mathfrak{A}^2)}\,.\sqrt{(4-\mathfrak{C}^2)}}$$

$$3.\quad \cos\gamma = \frac{2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\sqrt{(4-\mathfrak{A}^2)}\,.\sqrt{(4-\mathfrak{B}^2)}}$$

Zusatz. Wenn das Sehnen-Dreieck gleichschenklich, so daſs $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist, so gilt die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}\sqrt{(4-\mathfrak{B}^2)}}$$

und eben so für die beiden anderen Winkel.

Ist das Sehnen-Dreieck gleichseitig, so wird auch das sphärische Dreieck gleichseitig seyn, und

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{(4-\mathfrak{A}^2)}}$$

c) Bestimmung der Winkel des Sehnen-Dreiecks aus den Seiten des sphärischen Dreiecks.

$$1.\quad \cos\mathfrak{a} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}b + \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}a}{2\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin\tfrac{1}{2}c}$$

$$2.\quad \cos\mathfrak{b} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}b}{2\sin\tfrac{1}{2}a\,.\sin\tfrac{1}{2}c}$$

$$3.\quad \cos\mathfrak{c} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b - \sin^2\tfrac{1}{2}c}{2\sin\tfrac{1}{2}a\,.\sin\tfrac{1}{2}b}$$

Zusatz. Wenn das sphärische Dreieck gleichschenklich ist, so daſs b = c, so entsteht die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathfrak{a} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a}{2\sin\tfrac{1}{2}b}$$

Ist das sphärische Dreieck gleichseitig, so wird auch das Sehnen-Dreieck gleichseitig, folglich jeder $\angle = 60^\circ$ seyn.

d) Bestimmung eines Winkels im Sehnen-Dreiecke, aus dem correspondirenden Winkel des sphärischen Dreiecks, nebst den beiden einschliefsenden Seiten.

$$1.\quad \cos \mathfrak{a} = \cos \tfrac{1}{2} b \cdot \cos \tfrac{1}{2} c \cdot \cos \alpha + \sin \tfrac{1}{2} b \cdot \sin \tfrac{1}{2} c$$

$$2.\quad \cos \mathfrak{b} = \cos \tfrac{1}{2} a \cdot \cos \tfrac{1}{2} c \cdot \cos \beta + \sin \tfrac{1}{2} a \cdot \sin \tfrac{1}{2} c$$

$$3.\quad \cos \mathfrak{c} = \cos \tfrac{1}{2} a \cdot \cos \tfrac{1}{2} b \cdot \cos \gamma + \sin \tfrac{1}{2} a \cdot \sin \tfrac{1}{2} b$$

Zusatz. Wenn das sphärische Dreieck gleichschenklich ist, so dafs $b = c$, so wird:

$$\sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a} = \cos \tfrac{1}{2} b \cdot \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

e) Bestimmung eines Winkels im sphärischen Dreiecke, aus dem correspondirenden Winkel des Sehnen-Dreiecks und den beiden, denselben einschliefsenden Seiten.

$$1.\quad \cos \alpha = \frac{4 \cos \mathfrak{a} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\sqrt{(4 - \mathfrak{B}^2)} \cdot \sqrt{(4 - \mathfrak{C}^2)}}$$

$$2.\quad \cos \beta = \frac{4 \cos \mathfrak{b} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\sqrt{(4 - \mathfrak{A}^2)} \cdot \sqrt{(4 - \mathfrak{C}^2)}}$$

$$3.\quad \cos \gamma = \frac{4 \cos \mathfrak{c} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\sqrt{(4 - \mathfrak{A}^2)} \cdot \sqrt{(4 - \mathfrak{B}^2)}}$$

Zusatz. Wenn das Sehnen-Dreieck gleichschenklich ist, so dafs $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so wird:

$$\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} \mathfrak{a}}{\sqrt{(4 - \mathfrak{B}^2)}}$$

E) Flächeninhalt sphärischer Dreiecke.

In einem sphärischen Dreiecke seien die drei Winkel	$= \alpha$, β und γ
die denselben correspondirenden Seiten	$= a$, b und c
der Radius der Kugel in Längenmafse ausgedrückt	$= r$
der dem Radius gleiche Bogen (von 57,°295775129) in Gradmafse ausgedrückt	$= \mu$
die Fläche des sphärischen Dreiecks	$= F$

a) Gegeben: die drei Winkel α, β und γ;
so ist, in gewöhnlichem Flächenmafse ausgedrückt:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^0)\frac{r^2\pi}{180}$$

in Quadrat-Graden hingegen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^0)\,\mu$$

Zusatz. Wenn das Dreieck einen rechten $\angle$ hat, z. B. $\gamma = 90^0$, so wird:

$$F = \frac{r^2\pi}{180}(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}r^2\pi$$

Hat das Dreieck zwei rechte Winkel, so dafs sowohl β als $\gamma = 90^0$ sind, so wird:

$$F = \frac{r^2\pi\alpha}{180}$$

b) Gegeben: zwei Seiten b und c, nebst dem eingeschlossenen Winkel α, so ist:

$$F = \varphi \cdot \frac{r^2\pi}{180}$$

wo φ den Bogen $\alpha + \beta + \gamma - 180^0$ bedeutet, und durch folgende Formel unmittelbar gefunden wird:

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\cot\tfrac{1}{2}b \cdot \cot\tfrac{1}{2}c + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

c) Gegeben: die drei Seiten a, b und c, so ist:

$$F = \varphi \cdot \frac{r^2\pi}{180}$$

wo φ gleichfalls den Bogen $\alpha + \beta + \gamma - 180^0$ bedeutet, und durch folgende Formel unmittelbar gefunden wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{[\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(a+c-b) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)]}}{2\cos\tfrac{1}{2}a \cdot \cos\tfrac{1}{2}b \cdot \cos\tfrac{1}{2}c}$$

Zusatz. Wenn das Dreieck gleichschenklich, und z. B. $b = c$ ist, so wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\tang\tfrac{1}{2}a}{2\cos^2\tfrac{1}{2}b} \cdot \sqrt{\sin(b + \tfrac{1}{2}a) \cdot \sin(b - \tfrac{1}{2}a)}$$

Ist das Dreieck gleichseitig, so wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\tang\tfrac{1}{2}a}{2\cos^2\tfrac{1}{2}a} \cdot \sqrt{\sin\tfrac{3}{2}a \cdot \sin\tfrac{1}{2}a}$$

F) Formeln für die Veränderungen, welche die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks erfahren, wenn einzelne derselben sich verändern.

AA) Formeln für das sphärische Dreieck überhaupt.

Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Theile, Seiten oder Winkel, als constant angenommen sind, so wird der Einflufs, welchen eine sehr kleine Veränderung (Differential) irgend eines dritten Theiles auf die übrigen Stücke des Dreiecks ausübt, durch folgende Formeln dargestellt:

Erster Fall.

Eine Seite a und ein anliegender Winkel β } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite *c*:

1. $\partial c = \partial b \,.\, \frac{1}{\cos \alpha} = \partial b \,.\, \sec \alpha$

2. $= \partial b \,.\, \frac{\sin b \,.\, \sin c}{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}$

3. $= \partial b \,.\, \frac{\sin c}{\cos a \,.\, \sin b - \sin a \,.\, \cos b \,.\, \cos \gamma}$

4. $= \partial b \,.\, \frac{1}{\cos a \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma - \cos \beta \,.\, \cos \gamma}$

bb) Die Veränderung des Winkels α:

5. $\partial \alpha = - \partial b \,.\, \tang \alpha \,.\, \cot b$

6. $= - \partial b \,.\, \frac{\sin \alpha (\cos c + \tang \alpha \,.\, \cot \beta)}{\sin c}$

7. $= - \partial b \,.\, \frac{\sin \gamma}{\sin b (\tang b \,.\, \cot a - \cos \gamma)}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

8. $\partial \gamma = \partial b \,.\, \frac{\tang \alpha}{\sin b}$

9. $= \partial b \,.\, \frac{\sin \gamma}{\sin^2 b \,.\, \cot a - \sin b \,.\, \cos b \,.\, \cos \gamma}$

10. $= \partial b \,.\, \frac{\sin \alpha \,.\, \tang \alpha}{\sin a \,.\, \sin \beta}$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

$$11.\quad \partial b = \partial c \,.\, \cos\alpha$$

$$12.\quad = \partial c \,.\, \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$13.\quad = \partial c \,.\, \frac{\cos a \,.\, \sin b - \sin a \,.\, \cos b \,.\, \cos\gamma}{\sin c}$$

$$14.\quad = \partial c \,.\, (\cos a \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma - \cos\beta \,.\, \cos\gamma)$$

bb) Die Veränderung des Winkels α:

$$15.\quad \partial\alpha = -\partial c \,.\, \sin\alpha \,.\, \cot\beta$$

$$16.\quad = -\partial c \,.\, \frac{\sin^2\alpha \,.\, \cot\alpha + \sin\alpha \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos c}{\sin c}$$

$$17.\quad = -\partial c \,.\, \frac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin b \,.\, \operatorname{tang} b}$$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

$$18.\quad \partial\gamma = \partial c \,.\, \frac{\sin\alpha}{\sin b}$$

$$19.\quad = \partial c \,.\, \frac{\sin a \,.\, \sin\beta}{\sin^2 b}$$

$$20.\quad = \partial c \,.\, \frac{\sin a \,.\, \sin\gamma}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$21.\quad = \partial c \,.\, \frac{\sin^2\alpha}{\sin a \,.\, \sin\beta}$$

c) Wenn sich der Winkel α um $\partial\alpha$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

$$22.\quad \partial b = -\partial\alpha \,.\, \cot\alpha \,.\, \operatorname{tang} b$$

$$23.\quad = -\partial\alpha \,.\, \frac{\sin c}{\sin\alpha\,(\cos c + \operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\beta)}$$

$$24.\quad = -\partial\alpha \,.\, \frac{\sin b\,(\operatorname{tang} b \,.\, \cot a - \cos\gamma)}{\sin\gamma}$$

bb) Die Veränderung der Seite c:

$$25.\quad \partial c = -\partial\alpha \,.\, \frac{\operatorname{tang} b}{\sin\alpha}$$

26. $\partial c = -\partial\alpha \cdot \frac{\sin c}{\sin^2\alpha \cdot \cot\beta + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos c}$

27. $\quad = -\partial\alpha \cdot \frac{\sin b \cdot \tang b}{\sin a \cdot \sin\beta}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

28. $\partial\gamma = -\partial\alpha \cdot \frac{1}{\cos b} = -\partial\alpha \cdot \sec b$

29. $\quad = -\partial\alpha \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma}$

30. $\quad = -\partial\alpha \cdot \frac{1}{\sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos c}$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

31. $\partial b = \partial\gamma \cdot \sin b \cdot \cot\alpha$

32. $\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin^2 b \cdot \cot a - \sin b \cdot \cos b \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma}$

33. $\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \tang\alpha}$

bb) Die Veränderung der Seite c:

34. $\partial c = \partial\gamma \cdot \frac{\sin b}{\sin\alpha}$

35. $\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin^2 b}{\sin a \cdot \sin\beta}$

36. $\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin b \cdot \sin c}{\sin a \cdot \sin\gamma}$

37. $\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin^2\alpha}$

cc) Die Veränderung des Winkels α:

38. $\partial\alpha = -\partial\gamma \cdot \cos b$

39. $\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$

40. $\quad = -\partial\gamma \cdot (\sin a \cdot \sin c \cdot \cos\beta + \cos a \cdot \cos c)$

Zweiter Fall.

Eine Seite a und der Gegenwinkel α } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite c:

$$1.\quad \partial c = -\partial b \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$

$$2.\quad = -\partial b \cdot (\cos c \cdot \sin\alpha \cdot \tan\beta - \cos\alpha)$$

$$3.\quad = -\partial b \cdot \frac{1}{\cos b \cdot \sin\alpha \cdot \tan\gamma - \cos\alpha}$$

$$4.\quad = -\partial b \cdot \frac{\sin c\,(\cos c - \cos a \cdot \cos b)}{\sin b\,(\cos b - \cos a \cdot \cos c)}$$

$$5.\quad = -\partial b \cdot \frac{\tan b \cdot \cot c - \cos\alpha}{1 - \tan b \cdot \cot c \cdot \cos\alpha}.$$

bb) Die Veränderung des Winkels β:

$$6.\quad \partial\beta = \partial b \cdot \cot b \cdot \tan\beta$$

$$7.\quad = \partial b \cdot \frac{\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos c \cdot \tan\beta}{\sin c}$$

$$8.\quad = \partial b \cdot \frac{\sin\gamma + \cos\gamma \cdot \cos a \cdot \tan\beta}{\sin a}$$

$$9.\quad = \partial b \cdot \frac{\sin a}{\sin c - \cos c \cdot \tan b \cdot \cos\alpha}$$

$$10.\quad = \partial b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin a - \cos a \cdot \tan b \cdot \cos\gamma}$$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

$$11.\quad \partial\gamma = -\partial b \cdot \frac{\sin\gamma}{\tan c \cdot \cos\beta}$$

$$12.\quad = -\partial b \cdot \frac{\cos c \cdot \tan\beta}{\sin b}$$

$$13.\quad = -\partial b \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos b \cdot \tan\gamma - \sin b \cdot \cos\alpha}$$

$$14.\quad = -\partial b \cdot \frac{\cos\gamma \cdot \tan\beta + \cos a \cdot \sin\gamma}{\sin a}$$

15. $\partial \gamma = -\partial b \cdot \frac{\sin \gamma (1 + \tang a \cdot \tang b \cdot \cos \gamma)}{\tang a - \tang b \cdot \cos \gamma}$

16. $= -\partial b \cdot \frac{\cos b \cdot \tang \gamma + \tang \alpha}{\sin b (\cos b \cdot \tang \alpha \cdot \tang \gamma - 1)}$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite *b*:

17. $\partial b = -\partial c \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$

18. $= -\partial c \cdot \frac{1}{\cos c \cdot \sin \alpha \cdot \tang \beta - \cos \alpha}$

19. $= -\partial c \cdot (\cos b \cdot \sin \alpha \cdot \tang \gamma - \cos \alpha)$

20. $= -\partial c \cdot \frac{\sin b (\cos b - \cos a \cdot \cos c)}{\sin c (\cos c - \cos a \cdot \cos b)}$

21. $= -\partial c \cdot \frac{1 - \tang b \cdot \cot c \cdot \cos \alpha}{\tang b \cdot \cot c - \cos \alpha}$

bb) Die Veränderung des Winkels β:

22. $\partial \beta = -\partial c \cdot \frac{\sin \beta}{\tang b \cdot \cos \gamma}$

23. $= -\partial c \cdot \frac{\cos b \cdot \tang \gamma}{\sin c}$

24. $= -\partial c \cdot \frac{\sin \alpha}{\tang b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos \alpha}$

25. $= -\partial c \cdot \frac{\cos \beta \cdot \tang \gamma + \cos a \cdot \sin \beta}{\sin a}$

26. $= -\partial c \cdot \frac{\sin \beta (1 + \tang a \cdot \tang c \cdot \cos \beta)}{\tang a - \tang c \cdot \cos \beta}$

27. $= -\partial c \cdot \frac{\cos c \cdot \tang \beta + \tang \alpha}{(\cos c \cdot \tang \alpha \cdot \tang \beta - 1) \sin c}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

28. $\partial \gamma = \partial c \cdot \cot c \cdot \tang \gamma$

29. $= \partial c \cdot \frac{\sin \alpha + \cos b \cdot \cos \alpha \cdot \tang \gamma}{\sin b}$

30. $= \partial c \cdot \frac{\sin \beta + \cos a \cdot \cos \beta \cdot \tang \gamma}{\sin a}$

31. $\partial\gamma = \partial c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin b - \cos b \cdot \tang c \cdot \cos\alpha}$

32. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin a - \cos a \cdot \tang c \cdot \cos\beta}$

c) Wenn sich der Winkel β um $\partial\beta$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

33. $\partial b = \partial\beta \cdot \tang b \cdot \cot\beta$

34. $\quad = \partial\beta \cdot \frac{\sin c}{\sin\alpha + \cos c \cdot \cos\alpha \cdot \tang\beta}$

35. $\quad = \partial\beta \cdot \frac{\sin a}{\sin\gamma + \cos a \cdot \tang\beta \cdot \cos\gamma}$

36. $\quad = \partial\beta \cdot \frac{\sin c - \tang b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$

37. $\quad = \partial\beta \cdot \frac{\sin a - \cos a \cdot \tang b \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma}$

bb) Die Veränderung der Seite c:

38. $\partial c = -\partial\beta \cdot \frac{\tang b \cdot \cos\gamma}{\sin\beta}$

39. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{\sin c}{\cos b \cdot \tang\gamma}$

40. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{\tang b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$

41. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{\sin a}{\cos\beta \cdot \tang\gamma + \cos a \cdot \sin\beta}$

42. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{\tang a - \tang c \cdot \cos\beta}{\sin\beta\,(1 + \tang a \cdot \tang c \cdot \cos\beta)}$

43. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{\sin c\,(\cos c \cdot \tang\alpha \cdot \tang\beta - 1)}{\cos c \cdot \tang\alpha \cdot \tang\beta - 1}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

44. $\partial\gamma = -\partial\beta \cdot \frac{\cos c}{\cos b}$

45. $\quad = -\partial\beta \cdot (\sin a \cdot \tang b \cdot \cos\gamma + \cos a)$

46. $\quad = -\partial\beta \cdot \frac{1}{\sin a \cdot \tang c \cdot \cos\beta + \cos a}$

47. $\partial\gamma = -\partial\beta \cdot \frac{\sin\gamma\,(\cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta)}{\sin\beta\,(\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma)}$

48. $= -\partial\beta \cdot \frac{\tang\beta \cdot \cot\gamma + \cos a}{1 + \cos a \cdot \tang\beta \cdot \cot\gamma}$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

49. $\partial b = -\partial\gamma \cdot \frac{\tang c \cdot \cos\beta}{\sin\gamma}$

50. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\sin b}{\cos c \cdot \tang\beta}$

51. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\cos b \cdot \tang\gamma - \sin b \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$

52. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\sin a}{\tang\beta \cdot \cos\gamma + \cos a \cdot \sin\gamma}$

53. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\tang a - \tang b \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma\,(1 + \tang a \cdot \tang b \cdot \cos\gamma)}$

54. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\sin b\,(\cos b \cdot \tang\alpha \cdot \tang\gamma - 1)}{\cos b \cdot \tang\gamma + \tang\alpha}$

bb) Die Veränderung der Seite c:

55. $\partial c = \partial\gamma \cdot \tang c \cdot \cot\gamma$

56. $= \partial\gamma \cdot \frac{\sin b}{\sin\alpha + \cos b \cdot \cos\alpha \cdot \tang\gamma}$

57. $= \partial\gamma \cdot \frac{\sin a}{\sin\beta + \cos a \cdot \cos\beta \cdot \tang\gamma}$

58. $= \partial\gamma \cdot \frac{\sin b - \cos b \cdot \cos\alpha \cdot \tang c}{\sin\alpha}$

59. $= \partial\gamma \cdot \frac{\sin a - \cos a \cdot \tang c \cdot \cos\beta}{\sin\beta}$

cc) Die Veränderung des Winkels β:

60. $\partial\beta = -\partial\gamma \cdot \frac{\cos b}{\cos c}$

61. $= -\partial\gamma \cdot \frac{1}{\sin a \cdot \tang b \cdot \cos\gamma + \cos a}$

62. $= -\partial\gamma \cdot (\sin a \cdot \tang c \cdot \cos\beta + \cos a)$

63. $\partial\beta = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin\beta\,(\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma)}{\sin\gamma\,(\cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta)}$

64. $ = -\partial\gamma \cdot \frac{1 + \cos a \cdot \tan\beta \cdot \cot\gamma}{\tan\beta \cdot \cot\gamma + \cos a}$

Dritter Fall.

Zwei Seiten, b und c } werden als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite a um ∂a verändert, so wird:

aa) die Veränderung des Winkels α:

1. $\partial\alpha = \partial a \cdot \frac{\sin a}{\sin b \cdot \sin c \cdot \sin\alpha}$

2. $ = \partial a \cdot \frac{1}{\sin c \cdot \sin\beta}$

3. $ = \partial a \cdot \frac{1}{\sin b \cdot \sin\gamma}$

bb) Die Veränderung des Winkels β:

4. $\partial\beta = -\partial a \cdot \frac{\cot\gamma}{\sin a}$

5. $ = -\partial a \cdot \frac{\cot c - \cot a \cdot \cos\beta}{\sin\beta}$

6. $ = -\partial a \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin c \cdot \sin\alpha}$

7. $ = -\partial a \cdot \frac{\cos c \cdot \sin\beta - \cot\alpha \cdot \cos\beta}{\sin c}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

8. $\partial\gamma = -\partial a \cdot \frac{\cot\beta}{\sin a}$

9. $ = -\partial a \cdot \frac{\cot b - \cot a \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma}$

10. $ = -\partial a \cdot \frac{\cos\beta}{\sin b \cdot \sin\alpha}$

11. $ = -\partial a \cdot \frac{\cos b \cdot \sin\gamma - \cot\alpha \cdot \cos\gamma}{\sin b}$

b) Wenn der Winkel α sich um $\partial\alpha$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite a:

$$12.\quad \partial a = \partial\alpha \, . \, \frac{\sin b \, . \, \sin c \, . \, \sin \alpha}{\sin a}$$

$$13.\quad = \partial\alpha \, . \, \sin c \, . \, \sin \beta$$

$$14.\quad = \partial\alpha \, . \, \sin b \, . \, \sin \gamma$$

bb) Die Veränderung des Winkels β:

$$15.\quad \partial\beta = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin^2 b \, (\cos c - \sin c \, . \, \tang b \, . \, \cos \alpha)}{\sin^2 a}$$

$$16.\quad = -\partial\alpha \, . \, \sin^2 \beta \, (\cos c - \cot \alpha \, . \, \cot \beta)$$

$$17.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin \beta \, . \, \cos \gamma}{\sin \alpha}$$

$$18.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin b \, . \, \cos \gamma}{\sin a}$$

$$19.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\cos c - \cos a \, . \, \cos b}{\sin^2 a}$$

$$20.\quad = -\partial\alpha \, . \, (\cos c - \sin c \, . \, \cot a \, . \, \cos \beta)$$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

$$21.\quad \partial\gamma = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin^2 c \, (\cos b - \sin b \, . \, \cot c \, . \, \cos \alpha)}{\sin^2 a}$$

$$22.\quad = -\partial\alpha \, . \, \sin^2 \gamma \, (\cos b - \cot \alpha \, . \, \cot \gamma)$$

$$23.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin \gamma \, . \, \cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$24.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\sin c \, . \, \cos \beta}{\sin a}$$

$$25.\quad = -\partial\alpha \, . \, \frac{\cos b - \cos a \, . \, \cos c}{\sin^2 a}$$

$$26.\quad = -\partial\alpha \, . \, (\cos b - \sin b \, . \, \cot a \, . \, \cos \gamma)$$

c) Wenn sich der Winkel β um $\partial\beta$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite a:

$$27.\quad \partial a = -\partial\beta \, . \, \sin a \, . \, \tang \gamma$$

$$28.\quad = -\partial\beta \, . \, \frac{\sin \beta}{\cot c - \cot a \, . \, \cos \beta}$$

29. $\partial a = -\partial\beta \cdot \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma}$

30. $= -\partial\beta \cdot \frac{\sin c}{\cos c \cdot \sin \beta - \cot \alpha \cdot \cos \beta}$

bb) Die Veränderung des Winkels α:

31. $\partial\alpha = -\partial\beta \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 b\,(\cos c - \cot b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha)}$

32. $= -\partial\beta \cdot \frac{1}{\sin^2 \beta\,(\cos c - \cot \alpha \cdot \cot \beta)}$

33. $= -\partial\beta \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \cdot \cos \gamma}$

34. $= -\partial\beta \cdot \frac{\sin a}{\sin b \cdot \cos \gamma}$

35. $= -\partial\beta \cdot \frac{\sin^2 a}{\cos c - \cos a \cdot \cos b}$

36. $= -\partial\beta \cdot \frac{1}{\cos c - \cot a \cdot \sin c \cdot \cos \beta}$

cc) Die Veränderung des Winkels γ:

37. $\partial\gamma = \partial\beta \cdot \cot \beta \cdot \tang \gamma$

38. $= \partial\beta \cdot \frac{\sin a \cdot \cot b - \cos a \cdot \cos \gamma}{\cos \gamma}$

39. $= \partial\beta \cdot \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\cos c - \cos a \cdot \cos b}$

40. $= \partial\beta \cdot \frac{\cos \beta}{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \cos \beta}$

41. $= \partial\beta \cdot \frac{\sin c \cdot \cot b - \cos c \cdot \cos \alpha}{\sin b \cdot \cot c - \cos b \cdot \cos \alpha}$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite a:

42. $\partial a = -\partial\gamma \cdot \sin a \cdot \tang \beta$

43. $= -\partial\gamma \cdot \frac{\sin \gamma}{\cot b - \cot a \cdot \cos \gamma}$

$$44.\quad \partial a = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$45.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin b}{\cos b \cdot \sin \gamma - \cot \alpha \cdot \cos \gamma}$$

bb) Die Veränderung des Winkels α:

$$46.\quad \partial\alpha = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin^2 a}{\sin^2 c\,(\cos b - \sin b \cdot \cot c \cdot \cos \alpha)}$$

$$47.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{1}{\sin^2 \gamma\,(\cos b - \cot \alpha \cdot \cot \gamma)}$$

$$48.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cdot \sin \gamma}$$

$$49.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin a}{\sin c \cdot \cos \beta}$$

$$50.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{\sin^2 a}{\cos b - \cos a \cdot \cos c}$$

$$51.\quad = -\partial\gamma \cdot \frac{1}{\cos b - \cot a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma}$$

cc) Die Veränderung des Winkels β:

$$52.\quad \partial\beta = \partial\gamma \cdot \tang \beta \cdot \cot \gamma$$

$$53.\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin a \cdot \cot b - \cos a \cdot \cos \gamma}$$

$$54.\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\cos b - \cos a \cdot \cos c}$$

$$55.\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \cos \beta}{\cos \beta}$$

$$56.\quad = \partial\gamma \cdot \frac{\sin b \cdot \cot c - \cos b \cdot \cos \alpha}{\sin c \cdot \cot b - \cos c \cdot \cos \alpha}$$

Vierter Fall.

Zwei Winkel, β und γ } werden als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite a un $\partial\alpha$ verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite b:

$$1.\quad \partial b = \partial a \cdot \sin^2 b\,(\cos \gamma + \cot a \cdot \cot b)$$

2. $\partial b = \partial a \cdot \frac{\sin b \cdot \cos c}{\sin a}$

3. $= \partial a \cdot \frac{\sin \beta \cdot \cos c}{\sin \alpha}$

4. $= \partial a \cdot \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2 \alpha}$

5. $= \partial a \cdot (\cos \gamma + \cos b \cdot \sin \gamma \cdot \cot \alpha)$

bb) Die Veränderung der Seite c:

6. $\partial c = \partial a \cdot \sin^2 c (\cos \beta + \cot a \cdot \cot c)$

7. $= \partial a \cdot \frac{\sin c \cdot \cos b}{\sin a}$

8. $= \partial a \cdot \frac{\cos b \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$

9. $= \partial a \cdot \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\sin^2 \alpha}$

10. $= \partial a \cdot (\cos \beta + \cos c \cdot \cot \alpha \cdot \sin \beta)$

cc) Die Veränderung des Winkels α:

11. $\partial \alpha = \partial a \cdot \frac{\sin a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$

12. $= \partial a \cdot \sin c \cdot \sin \beta$

13. $= \partial a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma$

b) Wenn die Seite b sich um ∂b verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite a:

14. $\partial a = \partial b \cdot \frac{1}{\sin^2 b (\cos \gamma + \cot a \cdot \cot b)}$

15. $= \partial b \cdot \frac{\sin a}{\sin b \cdot \cos c}$

16. $= \partial b \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos c \cdot \sin \beta}$

17. $= \partial b \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}$

18. $= \partial b \cdot \frac{1}{\cos \gamma + \cos b \cdot \cot \alpha \cdot \sin \gamma}$

bb) Die Veränderung der Seite c:

$$19.\quad \partial c = \partial b \,.\, cot\, b \,.\, tang\, c$$

$$20.\quad = \partial b \,.\, \frac{sin\, \alpha \,.\, cot\, \beta + cos\, c \,.\, cos\, \alpha}{cos\, c}$$

$$21.\quad = \partial b \,.\, \frac{cos\, \beta + cos\, \alpha \,.\, cos\, \gamma}{cos\, \gamma + cos\, \alpha \,.\, cos\, \beta}$$

$$22.\quad = \partial b \,.\, \frac{cos\, b}{sin\, \alpha \,.\, cot\, \gamma + cos\, b \,.\, cos\, \alpha}$$

$$23.\quad = \partial b \,.\, \frac{cot\, \beta \,.\, sin\, \gamma + cos\, a \,.\, cos\, \gamma}{sin\, b \,.\, cot\, \gamma + cos\, a \,.\, cos\, \beta}$$

cc) Die Veränderung des Winkels α:

$$24.\quad \partial \alpha = \partial b \,.\, tang\, c \,.\, sin\, \alpha$$

$$25.\quad = \partial b \,.\, \frac{sin\, b}{cot\, \gamma + cos\, b \,.\, cot\, \alpha}$$

$$26.\quad = \partial b \,.\, \frac{sin\, a \,.\, sin\, \gamma}{cos\, c}$$

$$27.\quad = \partial b \,.\, \frac{sin\, b \,.\, cos\, \gamma + cot\, a \,.\, cos\, b}{sin\, \gamma}$$

c) Wenn die Seite c sich um ∂c verändert, so wird:

aa) die Veränderung der Seite a:

$$28.\quad \partial a = \partial c \,.\, \frac{1}{sin^2 c\, (cos\, \beta + cot\, a \,.\, cot\, c)}$$

$$29.\quad = \partial c \,.\, \frac{sin\, a}{sin\, c \,.\, cos\, b}$$

$$30.\quad = \partial c \,.\, \frac{sin\, \alpha}{cos\, b \,.\, sin\, \gamma}$$

$$31.\quad = \partial c \,.\, \frac{sin^2 \alpha}{cos\, \beta + cos\, \alpha \,.\, cos\, \gamma}$$

$$32.\quad = \partial c \,.\, \frac{1}{cos\, \beta + cos\, c \,.\, cot\, \alpha \,.\, sin\, \beta}$$

bb) Die Veränderung der Seite b:

$$33.\quad \partial b = \partial c \,.\, tang\, b \,.\, cot\, c$$

$$34.\quad = \partial c \,.\, \frac{cos\, c}{sin\, \alpha \,.\, cot\, \beta + cos\, \alpha \,.\, cos\, c}$$

35. $\partial b = \partial c \cdot \frac{\cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma}$

36. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cot\gamma + \cos b \cdot \cos\alpha}{\cos b}$

37. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin b \cdot \cot\gamma + \cos a \cdot \cos\beta}{\sin\gamma \cdot \cot\beta + \cos a \cdot \cos\gamma}$

cc) Die Veränderung des Winkels α:

38. $\partial\alpha = \partial c \cdot \mathrm{tang}\, b \cdot \sin\alpha$

39. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin c}{\cot\beta + \cot a \cdot \cos c}$

40. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin a \cdot \sin\beta}{\cos b}$

41. $\quad = \partial c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin c \cdot \cos\beta + \cot a \cdot \cos c}$

d) Wenn sich der Winkel α um $\partial\alpha$ verändert, so ist:

aa) die Veränderung der Seite a:

42. $\partial a = \partial\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$

43. $\quad = \partial\alpha \cdot \frac{1}{\sin c \cdot \sin\beta}$

44. $\quad = \partial\alpha \cdot \frac{1}{\sin b \cdot \sin\gamma}$

bb) Die Veränderung der Seite b:

45. $\partial b = \partial\alpha \cdot \frac{\cot c}{\sin\alpha}$

46. $\quad = \partial\alpha \cdot \frac{\cot\gamma + \cot b \cdot \cot\alpha}{\sin b}$

47. $\quad = \partial\alpha \cdot \frac{\cos c}{\sin a \cdot \sin\gamma}$

48. $\quad = \partial\alpha \cdot \frac{\sin b \cdot \cos\gamma + \cot a \cdot \cos b}{\sin\gamma}$

cc) Die Veränderung der Seite c:

49. $\partial c = \partial\alpha \cdot \frac{\cot b}{\sin\alpha}$

50. $\partial c = \partial\alpha \, . \, \frac{\cot\beta + \cot a \, . \, \cot c}{\sin c}$

51. $\quad = \partial\alpha \, . \, \frac{\cos b}{\sin a \, . \, \sin\beta}$

52. $\quad = \partial\alpha \, . \, \frac{\sin c \, . \, \cos\beta + \cot a \, . \, \cos c}{\sin\beta}$

BB) Formeln für sphärische Dreiecke, in welchen eine Seite $= 90°$ ist.

Erster Fall.

Eine Seite a ($= 90°$) und ein anliegender Winkel β } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so wird:

1. $\partial c = -\partial b \, . \, tang\, b \, . \, tang\, c$
2. $\partial\alpha = \partial b \, . \, \frac{tang\,\gamma}{\sin b}$
3. $\partial\gamma = -\partial b \, . \, \frac{2\, tang\,\gamma}{\sin 2b}$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so wird:

4. $\partial b = -\partial c \, . \, \cot b \, . \, \cot c$
5. $\partial\alpha = \partial c \, . \, \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, . \, tang\, c$
6. $\partial\gamma = \partial c \, . \, \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2c}$

c) Wenn sich der Winkel α um $\partial\alpha$ verändert, so wird:

7. $\partial b = \partial\alpha \, . \, \sin b \, . \, \cot\gamma$
8. $\partial c = \partial\alpha \, . \, \frac{2 \cot c}{\sin 2\alpha}$
9. $\partial\gamma = \partial\alpha \, . \, tang\,\alpha \, . \, \cot\gamma$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

10. $\partial b = -\partial\gamma \, . \, \frac{1}{2} \sin 2b \, . \, \cot\gamma$
11. $\partial c = \partial\gamma \, . \, \frac{\sin 2c}{\sin 2\gamma}$
12. $\partial\alpha = \partial\gamma \, . \, \cot\alpha \, . \, tang\,\gamma$

Zweiter Fall.

Eine Seite a (= 90°) und ein Gegenwinkel α } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so ist:

$$1.\quad \partial c = -\partial b \cdot \frac{\sin 2c}{\sin 2b}$$

$$= -\partial b \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$

$$= \partial b \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos^2\beta}$$

$$= \partial b \cdot \frac{\cos^2\gamma}{\cos\alpha}$$

$$2.\quad \partial\beta = \partial b \cdot \mathrm{tang}\, b \cdot \cot\beta$$

$$3.\quad \partial\gamma = \partial b \cdot \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma \cdot \mathrm{tang}\, b$$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so ist:

$$4.\quad \partial b = -\partial c \cdot \frac{\sin 2b}{\sin 2c}$$

$$= -\partial c \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

$$= \partial c \cdot \frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha}$$

$$= \partial c \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos^2\gamma}$$

$$5.\quad \partial\beta = -\partial c \cdot \tfrac{1}{2}\sin 2\beta \cdot \mathrm{tang}\, c$$

$$6.\quad \partial\gamma = \partial c \cdot \cot c \cdot \mathrm{tang}\,\gamma$$

c) Wenn sich der Winkel β um $\partial\beta$ verändert, so wird:

$$7.\quad \partial b = \partial\beta \cdot \mathrm{tang}\, b \cdot \cot\beta$$

$$8.\quad \partial c = -\partial\beta \cdot \frac{2\cot c}{\sin 2\beta}$$

$$9.\quad \partial\gamma = -\partial\beta \cdot \mathrm{tang}\,\beta \cdot \cot\gamma$$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so wird:

$$10.\quad \partial b = -\partial\gamma \cdot 2\cot b \cdot \sin 2\gamma$$

$$11.\quad \partial c = \partial\gamma \cdot \mathrm{tang}\, c \cdot \cot\gamma$$

$$12.\quad \partial\beta = -\partial\gamma \cdot \cot\beta \cdot \mathrm{tang}\,\gamma$$

Dritter Fall.

Zwei Seiten,
b (= 90°) und c } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite a um ∂a verändert, so wird:

$$1.\quad \partial\alpha = \partial a \cdot tang\, a \cdot cot\, \alpha$$

$$2.\quad \partial\beta = \partial a \cdot \frac{2\, cot\, \beta}{sin\, 2a}$$

$$= -\partial a \cdot \frac{cos\, \gamma \cdot cot\, \gamma}{cos\, c}$$

$$= -\partial a \cdot \frac{cot\, \gamma}{sin\, a}$$

$$3.\quad \partial\gamma = -\partial a \cdot \frac{cot\, \beta}{sin\, a}$$

b) Wenn sich der Winkel α um ∂α verändert, so wird:

$$4.\quad \partial a = \partial\alpha \cdot cot\, a \cdot tang\, \alpha$$

$$5.\quad \partial\beta = \partial\alpha \cdot \frac{sin\, 2\beta}{sin\, 2\alpha}$$

$$= -\partial\alpha \cdot \frac{cos\, \gamma}{sin\, a}$$

$$= -\partial\alpha \cdot \frac{cos^2\, \gamma}{cos\, c}$$

$$6.\quad \partial\gamma = \partial\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\, cot\, \alpha \cdot sin\, 2\gamma$$

c) Wenn sich der Winkel β um ∂β verändert, so wird:

$$7.\quad \partial a = \partial\beta \cdot \tfrac{1}{2}\, sin\, 2a \cdot tang\, \beta$$

$$= -\partial\beta \cdot \frac{cos\, c \cdot tang\, \gamma}{cos\, \gamma}$$

$$= -\partial\beta \cdot sin\, a \cdot tang\, \gamma$$

$$8.\quad \partial\alpha = \partial\beta \cdot \frac{sin\, 2\alpha}{sin\, 2\beta}$$

$$= -\partial\beta \cdot \frac{sin\, a}{cos\, \gamma}$$

$$= -\partial\beta \cdot \frac{cos\, c}{cos^2\, \gamma}$$

$$9.\quad \partial\gamma = \partial\gamma \cdot tang\, \beta \cdot cot\, \gamma$$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so ist:

10. $\partial a = -\partial\gamma \,.\, \sin a \,.\, \operatorname{tang} \beta$

11. $\partial\alpha = \partial\gamma \,.\, \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{\sin 2\gamma}$

12. $\partial\beta = \partial\gamma \,.\, \operatorname{tang} \beta \,.\, \cot \gamma$

CC) Formeln für sphärische Dreiecke, in welchen ein Winkel $= 90^0$ ist.

Erster Fall.

Eine Seite a und ein anliegender Winkel β $(= 90^0)$ sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so ist:

1. $\partial c = \partial b \,.\, \operatorname{tang} b \,.\, \cot c$

2. $\partial\alpha = -\partial b \,.\, \frac{\cot \gamma}{\sin b}$

3. $\partial\gamma = -\partial b \,.\, \frac{2 \cot \gamma}{\sin 2b}$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so ist:

4. $\partial b = \partial c \,.\, \operatorname{tang} c \,.\, \cot b$

5. $\partial\alpha = \partial c \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \,.\, \cot c$

6. $\partial\gamma = \partial c \,.\, \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2c}$

c) Wenn sich der Winkel α um $\partial\alpha$ verändert, so ist:

7. $\partial b = -\partial\alpha \,.\, \sin b \,.\, \operatorname{tang} \gamma$

8. $\partial c = -\partial\alpha \,.\, \frac{2 \operatorname{tang} c}{\sin 2\alpha}$

9. $\partial\gamma = -\partial\alpha \,.\, \operatorname{tang} \alpha \,.\, \operatorname{tang} \gamma$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so ist:

10. $\partial b = \partial\gamma \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2b \,.\, \operatorname{tang} \gamma$

11. $\partial c = \partial\gamma \,.\, \frac{\sin 2c}{\sin 2\gamma}$

12. $\partial\alpha = -\partial\gamma \,.\, \cot \alpha \,.\, \cot \gamma$

Zweiter Fall.

Eine Seite a und der Gegenwinkel α (= 90°) } sind als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so ist:

$$1.\quad \partial c = -\partial b \,.\, tang\, b \,.\, cot\, c$$
$$2.\quad \partial\beta = \partial b \,.\, tang\, \beta \,.\, cot\, b$$
$$3.\quad \partial\gamma = -\partial b \,.\, \frac{2\, cot\, \gamma}{sin\, 2b}$$

b) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so ist:

$$4.\quad \partial b = -\partial c \,.\, cot\, b \,.\, tang\, c$$
$$5.\quad \partial\beta = -\partial c \,.\, \frac{2\, cot\, \beta}{sin\, 2c}$$
$$6.\quad \partial\gamma = \partial c \,.\, tang\, \gamma \,.\, cot\, c$$

c) Wenn sich der Winkel β um $\partial\beta$ verändert, so ist:

$$7.\quad \partial b = \partial\beta \,.\, cot\, b \,.\, tang\, \beta$$
$$8.\quad \partial c = -\partial\beta \,.\, 2\, tang\, \beta \,.\, sin\, 2c$$
$$9.\quad \partial\gamma = -\partial\beta \,.\, \frac{sin\, 2\gamma}{sin\, 2\beta} = -\partial\beta \,.\, \frac{cos\, c}{cos\, b} = -\partial\beta \,.\, \frac{cos\, a}{cos^2 b} = -\partial\beta \,.\, \frac{cos^2 c}{cos\, a}$$

d) Wenn sich der Winkel γ um $\partial\gamma$ verändert, so ist:

$$10.\quad \partial b = \partial\gamma \,.\, 2\, sin\, 2b \,.\, tang\, \gamma$$
$$11.\quad \partial c = \partial\gamma \,.\, tang\, c \,.\, cot\, \gamma$$
$$12.\quad \partial\beta = -\partial\gamma \,.\, \frac{sin\, 2\beta}{sin\, 2\gamma} = -\partial\gamma \,.\, \frac{cos\, b}{cos\, c} = -\partial\gamma \,.\, \frac{cos^2 b}{cos\, a} = -\partial\gamma \,.\, \frac{cos\, a}{cos^2 c}$$

Dritter Fall.

Zwei Winkel, β (= 90°) und γ } werden als constant angenommen.

a) Wenn sich die Seite a um ∂a verändert, so ist:

$$1.\quad \partial b = \partial a \,.\, \frac{\sin 2b}{\sin 2a}$$

$$= \partial a \,.\, \frac{\cos c}{\sin \alpha}$$

$$= \partial a \,.\, \frac{\cos^2 c}{\cos \gamma}$$

$$2.\quad \partial c = \partial a \,.\, \tfrac{1}{2} \sin 2c \,.\, \cot a$$

$$3.\quad \partial \alpha = \partial a \,.\, \tang a \,.\, \cot \alpha$$

b) Wenn sich die Seite b um ∂b verändert, so ist:

$$4.\quad \partial a = \partial b \,.\, \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

$$= \partial b \,.\, \frac{\sin a}{\cos c}$$

$$= \partial b \,.\, \frac{\cos \gamma}{\cos^2 c}$$

$$5.\quad \partial c = \partial b \,.\, \cot b \,.\, \tang c$$

$$6.\quad \partial \alpha = \partial b \,.\, \tfrac{1}{2} \tang b \,.\, \sin 2\alpha$$

$$= \partial b \,.\, \frac{\cos \gamma \,.\, \tang c}{\cos c}$$

c) Wenn sich die Seite c um ∂c verändert, so ist:

$$7.\quad \partial a = \partial c \,.\, \frac{2 \tang a}{\sin 2c}$$

$$8.\quad \partial b = \partial c \,.\, \tang b \,.\, \cot c$$

$$9.\quad \partial \alpha = \partial c \,.\, \tang b \,.\, \sin \alpha$$

d) Wenn sich der Winkel α um $\partial\alpha$ verändert, so ist:

$$10.\quad \partial a = \partial \alpha \,.\, \cot a \,.\, \tang \alpha$$

$$11.\quad \partial b = \partial \alpha \,.\, \frac{2 \cot b}{\sin 2\alpha}$$

$$= \partial \alpha \,.\, \frac{\cot c \,.\, \cos c}{\cos \gamma}$$

$$12. \quad \partial c = \partial \alpha \, . \, \frac{\cot b}{\sin \alpha}$$

Anmerkung. Die hier für rechtwinkliche Dreiecke gegebenen Formeln, schliefsen keineswegs den Gebrauch der in AA) aufgestellten allgemeinen Veränderungsformeln aus, sondern enthalten nur solche Ausdrücke, welche nicht unmittelbar aus jenen abgeleitet werden können, und daher dem rechtwinklichen Dreiecke eigenthümlich sind.

Zusätze.

1) Wenn in einem sphärischen Dreiecke nicht zwei, sondern nur ein, oder gar kein Theil als constant angenommen werden kann, so tritt dieselbe Behandlung ein, welche Seite 144 für ebene Dreiecke dargestellt worden ist.

2) Bei sphärischen Dreiecken findet die, Seite 141 angedeutete Reduction der Winkel in Bogen nicht Statt, da hier alle Elemente der Rechnung in Gradmaafs ausgedrückt erscheinen.

Zweiter Abschnitt.

Fòrmeln zur trigonometrischen Analysis.

I. Tafel zur Bestimmung der Werthe, des algebraischen Zeichens und der Veränderungen der trigonometrischen Funktionen in den vier Quadranten des Kreises.

	Für 0^0	Für einen $\angle \alpha$ zwischen 0^0 und 90^0 (erster Quadrant)		Für 90^0	Für einen $\angle \alpha$ zwischen 90^0 und 180^0 (zweiter Quadrant)	
Sinus α	$=0$	$=+\sin\alpha$	w	$=+1$	$=+\sin(180^0-\alpha)$ $=+\cos(\alpha-90^0)$	a
Cosinus α	$=+1$	$=+\cos\alpha$	a	$=0$	$=-\cos(180^0-\alpha)$ $=-\sin(\alpha-90^0)$	w
Tangente α	$=0$	$=+\mathrm{tang}\,\alpha$	w	$=\infty$	$=-\mathrm{tang}(180^0-\alpha)$ $=-\cot(\alpha-90^0)$	a
Cotangente α	$=\infty$	$=+\cot\alpha$	a	$=0$	$=-\cot(180^0-\alpha)$ $=-\mathrm{tang}(\alpha-90^0)$	w
Secante α	$=+1$	$=+\sec\alpha$	w	$=\infty$	$=-\sec(180^0-\alpha)$ $=-\mathrm{cosec}(\alpha-90^0)$	a
Cosecante α	$=\infty$	$=+\mathrm{cosec}\,\alpha$	a	$=+1$	$=+\mathrm{cosec}(180^0-\alpha)$ $=+\sec(\alpha-90^0)$	w
Sinus versus α	$=0$	$=+\sin\mathrm{vers}\,\alpha$	w	$=+1$	$=2-\sin\mathrm{vers}(180^0-\alpha)$ $=2-\cos\mathrm{vers}(\alpha-90^0)$	w
Cosinus versus α	$=+1$	$=+\cos\mathrm{vers}\,\alpha$	a	$=0$	$=\cos\mathrm{vers}(180^0-\alpha)$ $=\sin\mathrm{vers}(\alpha-90^0)$	w

Anmerkungen. 1) Der Buchstabe w bedeutet, daſs die Funktion wächst, während der Bogen

2) Ueberschreitet der Bogen ein oder mehreremal das Maaſs von 360^0, so wird

Für 180°	Für einen ∠ α zwischen 180° und 270° (dritter Quadrant)		Für 270°	Für einen ∠ α zwischen 270° und 360° (vierter Quadrant)		Für 360°
$=0$	$= -\sin(\alpha - 180^\circ)$ $= -\cos(270^\circ - \alpha)$	w	$=-1$	$= -\sin(360^\circ - \alpha)$ $= -\cos(\alpha - 270^\circ)$	a	$=0$
$=-1$	$= -\cos(\alpha - 180^\circ)$ $= -\sin(270^\circ - \alpha)$	a	$=0$	$= +\cos(360^\circ - \alpha)$ $= +\sin(\alpha - 270^\circ)$	w	$=+1$
$=0$	$= +\mathrm{tang}(\alpha - 180^\circ)$ $= +\cot(270^\circ - \alpha)$	w	$=\infty$	$= -\mathrm{tang}(360^\circ - \alpha)$ $= -\cot(\alpha - 270^\circ)$	a	$=0$
$=\infty$	$= +\cot(\alpha - 180^\circ)$ $= +\mathrm{tang}(270^\circ - \alpha)$	a	$=0$	$= -\cot(360^\circ - \alpha)$ $= -\mathrm{tang}(\alpha - 270^\circ)$	w	$=\infty$
$=-1$	$= -\sec(\alpha - 180^\circ)$ $= -\mathrm{cosec}(270^\circ - \alpha)$	w	$=\infty$	$= +\sec(360^\circ - \alpha)$ $= +\mathrm{cosec}(\alpha - 270^\circ)$	a	$=+1$
$=\infty$	$= -\mathrm{cosec}(\alpha - 180^\circ)$ $= -\sec(270^\circ - \alpha)$	a	$=-1$	$= -\mathrm{cosec}(360^\circ - \alpha)$ $= -\sec(\alpha - 270^\circ)$	w	$=\infty$
$=+2$	$= 2 - \sin\mathrm{vers}(\alpha - 180^\circ)$ $= 2 - \cos\mathrm{vers}(270^\circ - \alpha)$	a	$=+1$	$= \sin\mathrm{vers}(360^\circ - \alpha)$ $= \cos\mathrm{vers}(\alpha - 270^\circ)$	a	$=0$
$=+1$	$= 2 - \sin\mathrm{vers}(270^\circ - \alpha)$ $= 2 - \cos\mathrm{vers}(\alpha - 180^\circ)$	w	$=+2$	$= 2 - \cos\mathrm{vers}(\alpha - 270^\circ)$ $= 2 - \sin\mathrm{vers}(360^\circ - \alpha)$	a	$=1$

wächst; a hingegen, daſs die Funktion abnimmt, wenn der Bogen wächst.
360° so oft abgezogen, als dies möglich ist, ohne eine negative Zahl zu erhalten.

II. Zusammenstellung analytischer Werthe für die Funktionen bestimmter Bogen.

A) Werthe für die *Sinus* und *Cosinus* der Bogen von 3 zu 3 Grad.

$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$

$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\sqrt{(15+3\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}]$

$\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{(30+6\sqrt{5})}-1-\sqrt{5}]$

$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \frac{1}{4}[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}-\sqrt{(5-\sqrt{5})}] = \frac{1}{4}[\sqrt{(3+\sqrt{5})}-\sqrt{(5-\sqrt{5})}]$

$\sin 12^\circ = \cos 78^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{3}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}-\sqrt{15}]$

$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{1}{2}[\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}] = \frac{1}{4}[\sqrt{6}-\sqrt{2}]$

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}[-1+\sqrt{5}]$

$\sin 21^\circ = \cos 69^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{(15-3\sqrt{5})}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{15}{2}}]$

$\sin 24^\circ = \cos 66^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{3}+\sqrt{15}-\sqrt{(10-2\sqrt{5})}]$

$\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{4}[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}] = \frac{1}{4}[\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}]$

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 33^\circ = \cos 57^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{4}}+\sqrt{(15+3\sqrt{5})}-\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}]$

$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}[\sqrt{(10-2\sqrt{5})}]$

$\sin 39^\circ = \cos 51^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\sqrt{(15-3\sqrt{5})}]$

$\sin 42^\circ = \cos 48^\circ = \frac{1}{8}[1+\sqrt{(30+6\sqrt{5})}-\sqrt{5}]$

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$\sin 48^\circ = \cos 42^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{15}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})}-\sqrt{3}]$

$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}+\sqrt{(15-3\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}]$

$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}[1+\sqrt{5}]$

$\sin 57^\circ = \cos 33^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\sqrt{(15+3\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\sqrt{\tfrac{15}{2}}]$

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin 63^\circ = \cos 27^\circ = \frac{1}{4}[\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}] = \frac{1}{4}[\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\sqrt{(3-\sqrt{5})}]$

$\sin 66^\circ = \cos 24^\circ = \frac{1}{8}[1+\sqrt{(30-6\sqrt{5})}+\sqrt{5}]$

$\sin 69^\circ = \cos 21^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\sqrt{(15-3\sqrt{5})}-\sqrt{(5-\sqrt{5})}]$

$\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \frac{1}{4}[\sqrt{(10+2\sqrt{5})}]$

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{1}{2}[\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}] = \frac{1}{4}[\sqrt{6}+\sqrt{2}]$

$\sin 78^\circ = \cos 12^\circ = \frac{1}{8}[\sqrt{5}+\sqrt{(30+6\sqrt{5})}-1]$

$$\sin 81^\circ = \cos 9^\circ = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}\right] = \tfrac{1}{4}\left[\sqrt{(3+\sqrt{5})}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}\right]$$
$$\sin 84^\circ = \cos 6^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\right]$$
$$\sin 87^\circ = \cos 3^\circ = \tfrac{1}{8}\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\sqrt{(15+3\sqrt{5})}-\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right]$$
$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

B) Zusammenstellung einiger anderen brauchbaren Werthe für die *Sinus* und *Cosinus* bestimmter Bogen.

$$\sin 7\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 82\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)}$$
$$\sin 11\tfrac{1}{4}^\circ = \cos 78\tfrac{3}{4}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right]}$$
$$\sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 67\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$
$$\sin 33\tfrac{3}{4}^\circ = \cos 56\tfrac{1}{4}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[2-\sqrt{(2-\sqrt{2})}\right]}$$
$$\sin 37\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 52\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)}$$
$$\sin 52\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 37\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)}$$
$$\sin 56\tfrac{1}{4}^\circ = \cos 33\tfrac{3}{4}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[2+\sqrt{(2-\sqrt{2})}\right]}$$
$$\sin 67\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$\sin 78\tfrac{3}{4}^\circ = \cos 11\tfrac{1}{4}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right]}$$
$$\sin 82\tfrac{1}{2}^\circ = \cos 7\tfrac{1}{2}^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)}$$

C) Werthe für die *Tangenten* und *Cotangenten* von 3 zu 3 Grad.

$$\operatorname{tang} 3^\circ = \cot 87^\circ = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}-2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}(2-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{1+(2+\sqrt{3}).\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{3}-1).\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{3}+1).\sqrt{(5+\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 6^\circ = cot\ 84^\circ = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1+\sqrt{\left[3\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{3}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{3(5-\sqrt{5})}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}+\frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1)}{2}}$$

$$tang\ 9^\circ = cot\ 81^\circ = \frac{1-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{1+\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= 1+\sqrt{5}-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 12^\circ = cot\ 78^\circ = \frac{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3(5+\sqrt{5})}{2}\right)}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{[3(5+2\sqrt{5})]}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1+\sqrt{\left(\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{3}\right)}}$$

$$tang\ 15^\circ = cot\ 75^\circ = 2-\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$tang\ 18^\circ = cot\ 72^\circ = \sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

$$= \sqrt{(1-2\sqrt{\tfrac{1}{5}})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 21^\circ = cot\ 69^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}+1).\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}-1).\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}-2+\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3}).\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}.(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$tang\ 24^\circ = cot\ 66^\circ = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{1+\sqrt{[3(5-2\sqrt{5})]}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\left(\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{3}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}.(\sqrt{5}+1)}{2}-\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{3(5-\sqrt{5})}{2}\right)}}$$

$$tang\ 27^\circ = cot\ 63^\circ = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$tang\ 27^\circ = cot\ 63^\circ = \frac{1-\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}-1$$

$$tang\ 30^\circ = cot\ 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \tfrac{1}{3}.\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$$

$$tang\ 33^\circ = cot\ 57^\circ = \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}+(2-\sqrt{3}).\sqrt{5}}{\sqrt{5}-(2-\sqrt{3}).\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1-(2-\sqrt{3}).\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{(5+2\sqrt{5})}+\sqrt{[3(5+2\sqrt{5})]}-1}$$

$$tang\ 36^\circ = cot\ 54^\circ = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}\right].\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

$$tang\ 39^\circ = cot\ 51^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1).\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{3}+1).\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{1+(2+\sqrt{3}).\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 42^\circ = cot\ 48^\circ = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{3}\right)}}$$

$$tang\ 42^\circ = cot\ 48^\circ = \frac{\sqrt{[3(5+2\sqrt{5})]}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1+\sqrt{\left[3\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{3(5+\sqrt{5})}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

$$tang\ 45^\circ = cot\ 45^\circ = 1$$

$$tang\ 48^\circ = cot\ 42^\circ = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{3(5+2\sqrt{5})}-1}$$

$$tang\ 51^\circ = cot\ 39^\circ = \frac{1+(2+\sqrt{3}).\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 54^\circ = cot\ 36^\circ = \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{5}$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$tang\ 57^\circ = cot\ 33^\circ = \frac{1-(2-\sqrt{3}).\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{2-\sqrt{3}+\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$tang\ 60^\circ = cot\ 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$tang\ 63^\circ = cot\ 27^\circ = \frac{1+\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}}$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})}-1$$

$$tang\ 66^\circ = cot\ 24^\circ = \frac{1+\sqrt{[3(5-2\sqrt{5})]}}{\sqrt{3}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$tang\ 69^\circ = cot\ 21^\circ = \frac{1+(2-\sqrt{3}).\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}-2+\sqrt{3}}$$

$$tang\ 72^\circ = cot\ 18^\circ = \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

$$tang\ 75^\circ = cot\ 15^\circ = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

$$tang\ 78^\circ = cot\ 12^\circ = \frac{1+\sqrt{3(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}-\sqrt{3}}$$

$$tang\ 81^\circ = cot\ \ 9^\circ = \frac{1+\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{1-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= 1+\sqrt{5}+\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$

$$tang\ 84^\circ = cot\ \ 6^\circ = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}{\sqrt{[3(5-2\sqrt{5})]}-1}$$

$$tang\ 87^\circ = cot\ \ 3^\circ = \frac{1+(2+\sqrt{3}).\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}$$

D) Funktionen für die aliquoten Theile des Kreises.

Es bedeute π den halben Kreis oder 180°, so sind:

aa) Die Funktionen für $\frac{\pi}{3}$ (= 60°)

1. *sin* $= \frac{1}{2}.\sqrt{3}$
2. *cos* $= \frac{1}{2}$
3. *tang* $= \sqrt{3}$
4. *cot* $= \frac{1}{3}.\sqrt{3}$
5. *sec* $= 2$
6. *cosec* $= \frac{2}{3}.\sqrt{3}$

bb) Die Funktionen für $\frac{\pi}{4}$ (= 45°)

1. *sin* $= \sqrt{\frac{1}{2}}$
2. *cos* $= \sqrt{\frac{1}{2}}$
3. *tang* $= 1$
4. *cot* $= 1$
5. *sec* $= \sqrt{2}$
6. *cosec* $= \sqrt{2}$

cc) Die Funktionen für $\frac{\pi}{5}$ (= 36°)

1. $sin = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(10-2\sqrt{6})}$
2. $cos = \frac{1}{4} \cdot (1+\sqrt{5})$
3. $tang = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}$
4. $cot = \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)}$
5. $sec = \sqrt{5}-1$
6. $cosec = \sqrt{\left(\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}\right)}$

dd) Die Funktionen für $\frac{\pi}{6}$ (= 30°)

1. $sin = \frac{1}{2}$
2. $cos = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$
3. $tang = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$
4. $cot = \sqrt{3}$
5. $sec = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$
6. $cosec = 2$

ee) Die Funktionen für $\frac{\pi}{8}$ (= $22\frac{1}{2}$°)

1. $sin = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2-\sqrt{2})}$
2. $cos = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2+\sqrt{2})}$
3. $tang = \sqrt{2}-1$
4. $cot = \sqrt{2}+1$
5. $sec = \sqrt{2(2-\sqrt{2})}$
6. $cosec = \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$

ff) Die Funktionen für $\frac{\pi}{10}$ (= 18°)

1. $sin = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5}-1)$
2. $cos = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$
3. $tang = \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)}$

4. *cot* $= \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$

5. *sec* $= \sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)}$

6. *cosec* $= \sqrt{5}+1$

III. Werthe für sämmtliche Funktionen, ausgedrückt durch alle andere.

A) Werthe für den *Sinus* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	$\cos\alpha$;	$\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}$
2.	$\tan\alpha$;	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)}}$
3.	$\cot\alpha$;	$\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}}$
4.	$\sec\alpha$;	$\frac{\sqrt{(\sec^2\alpha-1)}}{\sec\alpha}$
5.	$\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6.	$\sin\frac{\alpha}{2}$;	$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$
7.	$\cos\frac{\alpha}{2}$;	$2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$
8.	$\tan\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
9.	$\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{1+\cot^2\frac{\alpha}{2}}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
10. $sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2.\sqrt{\left(sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$
11. $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2.\sqrt{\left(cosec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{cosec^2\frac{\alpha}{2}}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12. $sin\,2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1+sin\,2\alpha)}-\sqrt{(1-sin\,2\alpha)}}{2}$
13. $cos\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1-cos\,2\alpha}{2}\right)}$
14. $tang\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+tang^2\,2\alpha)}-1}{2\sqrt{(1+tang^2\,2\alpha)}}\right)}=$
	$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}.\frac{1+tang^2\,2\alpha-\sqrt{(1+tang^2\,2\alpha)}}{1+tang^2\,2\alpha}\right)}$
15. $cot\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+cot^2\,2\alpha)}-cot\,2\alpha}{2\sqrt{(1+cot^2\,2\alpha)}}\right)}=$
	$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}.\frac{1+cot^2\,2\alpha-cot\,2\alpha\sqrt{(1+cot^2\,2\alpha)}}{1+cot^2\,2\alpha}\right)}$
16. $sec\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{sec\,2\alpha-1}{2\,sec\,2\alpha}\right)}$
17. $cosec\,2\alpha$;	$\frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{cosec\,2\alpha+1}{cosec\,2\alpha}\right)}-\frac{1}{2}.\sqrt{\left(\frac{cosec\,2\alpha-1}{cosec\,2\alpha}\right)}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

18. $cos\,\alpha$, $tang\,\alpha$;	$cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha$
19. $cos\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{cos\,\alpha}{cot\,\alpha}$
20. $tang\,\alpha$, $sec\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha}{sec\,\alpha}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
21.	$\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\cos\alpha \cdot \sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$
22.	$\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{(\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha)}}$
23.	$\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$
24.	$\sec\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$;	$\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$
25.	$\sec\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$;	$(\sec\alpha - \cos\alpha)\cot\alpha$

e) In verschiedenartigen Funktionen des halben Bogens.

26.	$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$
27.	$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$1 - \left(\pm\sin\frac{\alpha}{2} \mp \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$
28.	$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}$
29.	$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sec\frac{\alpha}{2}}$
30.	$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$;	$2\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$
31.	$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}}$
32.	$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}}$
33.	$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
34.	$tang\frac{\alpha}{2}$, $sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2\,tang\frac{\alpha}{2}}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$
35.	$tang\frac{\alpha}{2}$, $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2}{tang\frac{\alpha}{2}\,.\,cosec^2\frac{\alpha}{2}}$
36.	$cot\frac{\alpha}{2}$, $sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2}{cot\frac{\alpha}{2}\,.\,sec^2\frac{\alpha}{2}}$
37.	$cot\frac{\alpha}{2}$, $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2\,cot\frac{\alpha}{2}}{cosec^2\frac{\alpha}{2}}$
38.	$sec\frac{\alpha}{2}$, $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2}{sec\frac{\alpha}{2}\,.\,cosec\frac{\alpha}{2}}$
39.	$sec\frac{\alpha}{2}$, $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2\,sec\frac{\alpha}{2}\,.\,cosec\frac{\alpha}{2}}{sec^2\frac{\alpha}{2}+cosec^2\frac{\alpha}{2}}$

f) Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen des einfachen, halben und doppelten u. s. w. Winkels zusammengesetzt.

40.	$cos\,\alpha$, $sin\,2\alpha$;	$\sqrt{(1+sin\,2\alpha)}-cos\,\alpha$
41.	$cos\,\alpha$, $sin\,2\alpha$;	$cos\,\alpha-\sqrt{(1-sin\,2\alpha)}$
42.	$cos\,\alpha$, $cos\,2\alpha$;	$\sqrt{(cos^2\alpha-cos\,2\alpha)}$
43.	$cos\,\alpha$, $\begin{cases} tang\frac{\alpha}{2}; \\ cot\frac{\alpha}{2}; \end{cases}$	$tang\frac{\alpha}{2}(1+cos\,\alpha)=\dfrac{1+cos\,\alpha}{cot\frac{\alpha}{2}}$
44.	id. id.;	$\dfrac{1-cos\,\alpha}{tang\frac{\alpha}{2}}=(1-cos\,\alpha)\,cot\frac{\alpha}{2}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
45.	$cot\ \alpha,\ cot\ \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{cot\ \frac{\alpha}{2} - cot\ \alpha}$
46.	$cot\ \alpha,\ tang\ \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{tang\ \frac{\alpha}{2} + cot\ \alpha}$
47.	$cos\ \alpha,\ \begin{cases} tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right); \\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right); \end{cases}$	$1 - \frac{cos\ \alpha}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)} = 1 - cos\ \alpha\ .\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$
48.	id. id.;	$1 - \frac{cos\ \alpha}{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)} = 1 - cos\ \alpha\ .\ tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
49.	$sin\ (30+\alpha),\ sin\ (30-\alpha)$;	$\frac{sin\ (30+\alpha) - sin\ (30-\alpha)}{\sqrt{3}}$
50.	$cos\ (30+\alpha),\ cos\ (30-\alpha)$;	$cos\ (30-\alpha) - cos\ (30+\alpha)$
51.	$sin\ (60+\alpha),\ sin\ (60-\alpha)$;	$sin\ (60+\alpha) - sin\ (60-\alpha)$
52.	$cos\ (60+\alpha),\ cos\ (60-\alpha)$;	$\frac{cos\ (60-\alpha) - cos\ (60+\alpha)}{\sqrt{3}}$
53.	$cos\ \alpha,\ sin\ (60+\alpha)$;	$2\left(sin\ (60+\alpha) - \frac{1}{2}\ .\ \sqrt{(3\ .\ cos\ \alpha)}\right)$
54.	$cos\ \alpha,\ sin\ (60-\alpha)$;	$2\left(\frac{1}{2}\ .\ \sqrt{3}\ .\ cos\ \alpha - sin\ (60-\alpha)\right)$
55.	$cos\ \alpha,\ cos\ (60+\alpha)$;	$\frac{\frac{1}{2}\ cos\ \alpha - cos\ (60+\alpha)}{\frac{1}{2}\ .\ \sqrt{3}}$
56.	$cos\ \alpha,\ cos\ (60-\alpha)$;	$\frac{cos\ (60-\alpha) - \frac{1}{2}\ cos\ \alpha}{\frac{1}{2}\ .\ \sqrt{3}}$
57.	$sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$2\ sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) - 1$
58.	$sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$1 - 2\ sin^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
59.	$tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1 - tang^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tang^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
60. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-1}{tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+1}$
61. $cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{cot^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)-1}{cot^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+1}$
62. $cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1-cot^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+cot^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
63. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$, $tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
64. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$, $cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
65. $tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$, $cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)-tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
66. $sin\,(45+\alpha)$, $sin\,(45-\alpha)$;	$\frac{sin\,(45+\alpha)-sin\,(45-\alpha)}{\sqrt{2}}$
67. $cos\,(45+\alpha)$, $cos\,(45-\alpha)$;	$\frac{cos\,(45-\alpha)-cos\,(45+\alpha)}{\sqrt{2}}$

B) Werthe für den *Cosinus* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $sin\,\alpha$;	$\sqrt{(1-sin^2\alpha)}$
2. $tang\,\alpha$;	$\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
3. $cot\,\alpha$;	$\frac{cot\,\alpha}{\sqrt{(1+cot^2\alpha)}}$
4. $sec\,\alpha$;	$\frac{1}{sec\,\alpha}$
5. $cosec\,\alpha$;	$\frac{\sqrt{(cosec^2\alpha-1)}}{cosec\,\alpha}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6. $sin\frac{\alpha}{2}$;	$1-2\,sin^2\frac{\alpha}{2}$
7. $cos\frac{\alpha}{2}$;	$2\,cos^2\frac{\alpha}{2}-1$
8. $tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1-tang^2\frac{\alpha}{2}}{1+tang^2\frac{\alpha}{2}}$
9. $cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{cot^2\frac{\alpha}{2}+1}$
10. $sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2-sec^2\frac{\alpha}{2}}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$
11. $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{cosec^2\frac{\alpha}{2}-2}{cosec^2\frac{\alpha}{2}}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12. $sin\,2\alpha$;

$$\sqrt{\left[\frac{1+\sqrt{(1-sin^2 2\alpha)}}{2}\right]} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1+sin\,2\alpha)}+\sqrt{(1-sin\,2\alpha)}}{2}$$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
13.	$\cos 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)}$
14.	$\operatorname{tang} 2\alpha$;	$\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 2\alpha)}+1}{2\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 2\alpha)}}\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha+\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 2\alpha)}}{1+\operatorname{tang}^2 2\alpha}\right]}$
15.	$\cot 2\alpha$;	$\sqrt{\left[\frac{\sqrt{(1+\cot^2 2\alpha)}+\cot 2\alpha}{2\sqrt{(1+\cot^2 2\alpha)}}\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cot^2 2\alpha+\cot 2\alpha\,.\sqrt{(1+\cot^2 2\alpha)}}{1+\cot^2 2\alpha}\right]}$
16.	$\sec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sec 2\alpha+1}{2\sec 2\alpha}\right)}$
17.	$\operatorname{cosec} 2\alpha$;	$\sqrt{\left[\frac{\operatorname{cosec} 2\alpha+\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 2\alpha-1)}}{2\operatorname{cosec} 2\alpha}\right]}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

18.	$\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$;	$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}$
19.	$\sin\alpha$, $\cot\alpha$;	$\sin\alpha\,.\cot\alpha$
20.	$\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha\,.\operatorname{cosec}\alpha}$
21.	$\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$
22.	$\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\sec\alpha$;	$\frac{1+\sin\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{tang}\alpha}$
23.	$\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\sec\alpha$;	$\frac{1-\sin\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{tang}\alpha}$
24.	$\sin\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$(\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha)\operatorname{tang}\alpha$
25.	$\sin\alpha$, $\cot\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha}{\cot\alpha}$
26.	$\sin\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$;	$\frac{\sin\alpha\,.\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha}$
27.	$\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$;	$\frac{\operatorname{tang}\alpha\,.\cot\alpha}{\sec\alpha}$

e) Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen des einfachen, halben und doppelten Bogens zusammengesetzt.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
28.	$\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$;	$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$
29.	$tang\frac{\alpha}{2}, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cot\frac{\alpha}{2} - tang\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} + tang\frac{\alpha}{2}}$
30.	$\sin\alpha, tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\sin\alpha}{tang\frac{\alpha}{2}} - 1$
31.	$\sin\alpha, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\sin\alpha . \cot\frac{\alpha}{2} - 1$
32.	$\sin\alpha, tang\frac{\alpha}{2}$;	$1 - \sin\alpha . tang\frac{\alpha}{2}$
33.	$\sin\alpha, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$1 - \frac{\sin\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}}$
34.	$tang\,\alpha, tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{1 + tang\,\alpha . tang\frac{\alpha}{2}}$
35.	$\cot\alpha, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cot\alpha . \cot\frac{\alpha}{2}}{\cot\alpha . \cot\frac{\alpha}{2} + 1}$
36.	$cosec\,\alpha, tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{cosec\,\alpha . tang\frac{\alpha}{2}} - 1$
37.	$cosec\,\alpha, tang\frac{\alpha}{2}$;	$1 - \frac{tang\frac{\alpha}{2}}{cosec\,\alpha}$
38.	$cosec\,\alpha, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{cosec\,\alpha} - 1$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
39.	$cosec\,\alpha,\ cot\frac{\alpha}{2}$;	$1-\frac{1}{cosec\,\alpha\,.\,cot\frac{\alpha}{2}}$
40.	$sin\,2\alpha,\ sin\,\alpha$;	$\frac{sin\,2\alpha}{2\,sin\,\alpha}$
41.	$cos\,\alpha,\ cos\,2\alpha$;	$\frac{1+cos\,2\alpha}{2\,cos\,\alpha}$
42.	$cosec\,\alpha,\ cosec\,2\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha}{2\,cosec\,2\alpha}$
43.	$sin\,2\alpha,\ sin\frac{\alpha}{2}$;	$\sqrt{(1+sin\,2\alpha)}-sin\frac{\alpha}{2}$
44.	$sin\,2\alpha,\ sin\frac{\alpha}{2}$;	$\sqrt{(1-sin\,2\alpha)}+sin\frac{\alpha}{2}$
45.	$sin\,\alpha,\ tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1+sin\,\alpha}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
46.	$sin\,\alpha,\ tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$(1-sin\,\alpha)\,.\,tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$
47.	$sin\,\alpha,\ tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$(1+sin\,\alpha)\,.\,tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
48.	$sin\,\alpha,\ tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1-sin\,\alpha}{tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
49.	$sin\,\alpha,\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$(1+sin\,\alpha)\,.\,cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$
50.	$sin\,\alpha,\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1-sin\,\alpha}{cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
51.	$sin\,\alpha,\ cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1+sin\,\alpha}{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
52.	$sin\,\alpha,\ cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$(1-sin\,\alpha)\,.\,cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
53.	$sin\,\alpha,\ sin\,(60+\alpha)$;	$\frac{sin\,(60+\alpha)-\frac{1}{2}\,sin\,\alpha}{\frac{1}{2}\,.\sqrt{3}}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
54. $\sin\alpha,\ \sin(60-\alpha)$;	$\frac{\sin(60-\alpha)+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}.\sqrt{3}}$
55. $\sin\alpha,\ \cos(60+\alpha)$;	$2(\cos(60+\alpha)+\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\sin\alpha)$
56. $\sin\alpha,\ \cos(60-\alpha)$;	$2(\cos(60-\alpha)-\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\sin\alpha)$
57. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{2}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
58. $cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right),\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{2}{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
59. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{2}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
60. $\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$2\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
61. $\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$2\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$
62. $\sin(30+\alpha),\ \sin(30-\alpha)$;	$\sin(30+\alpha)+\sin(30-\alpha)$
63. $\cos(30+\alpha),\ \cos(30-\alpha)$;	$\frac{\cos(30+\alpha)+\cos(30-\alpha)}{\sqrt{3}}$
64. $\cos(60+\alpha),\ \cos(60-\alpha)$;	$\cos(60+\alpha)+\cos(60-\alpha)$
65. $\sin(60+\alpha),\ \sin(60-\alpha)$;	$\frac{\sin(60+\alpha)+\sin(60-\alpha)}{\sqrt{3}}$

C) Werthe für die *Tangente* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $\sin\alpha$;	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}$
2. $\cos\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}{\cos\alpha}$
3. $cot\,\alpha$;	$\frac{1}{cot\,\alpha}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
4.	$sec\, \alpha$;	$\sqrt{(sec^2 \alpha - 1)}$
5.	$cosec\, \alpha$;	$\frac{1}{\sqrt{(cosec^2 \alpha - 1)}}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6.	$sin \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} . \sqrt{\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$
7.	$cos \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} . \sqrt{\left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$
8.	$tang \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\, tang \frac{\alpha}{2}}{1 - tang^2 \frac{\alpha}{2}}$
9.	$cot \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 \cot \frac{\alpha}{2}}{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$
10.	$sec \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 \sqrt{\left(sec^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}}{2 - sec^2 \frac{\alpha}{2}}$
11.	$cosec \frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 \sqrt{\left(cosec^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}}{cosec^2 \frac{\alpha}{2} - 2}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12.	$sin\, 2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} - \sqrt{(1 - \sin 2\alpha)}}{\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + \sqrt{(1 - \sin 2\alpha)}}$
13.	$cos\, 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}\right)}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
14.	$tang\, 2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(tang^2 2\alpha + 1)} - 1}{tang\, 2\alpha}$
15.	$cot\, 2\alpha$;	$\sqrt{(1 + cot^2 2\alpha)} - cot\, 2\alpha$
16.	$sec\, 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{sec\, 2\alpha - 1}{sec\, 2\alpha + 1}\right)}$
17.	$cosec\, 2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(cosec\, 2\alpha + 1)} - \sqrt{(cosec\, 2\alpha - 1)}}{\sqrt{(cosec\, 2\alpha + 1)} + \sqrt{(cosec\, 2\alpha - 1)}}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

18.	$sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$;	$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$
19.	$sin\,\alpha$, $sec\,\alpha$;	$sin\,\alpha \,.\, sec\,\alpha$
20.	$cos\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{1}{cos\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha}$
21.	$sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha}{cosec\,\alpha}$
22.	$sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha \,.\, cot^2\alpha}$
23.	$sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $sec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha - cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
24.	$sin\,\alpha$, $cot\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha}{cot\,\alpha}$
25.	$cos\,\alpha$, $sec\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{cos\,\alpha \,.\, sec\,\alpha}{cot\,\alpha}$

e) In verschiedenartigen Funktionen des halben Bogens.

26.	$sin\frac{\alpha}{2}$, $cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\, sin\frac{\alpha}{2} \,.\, cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 2\, sin^2\frac{\alpha}{2}}$
27.	$sin\frac{\alpha}{2}$, $cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\, sin\frac{\alpha}{2} \,.\, cos\frac{\alpha}{2}}{2\, cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
28. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$
29. $\tang\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tang\frac{\alpha}{2}}$
30. $\tang\frac{\alpha}{2}$, $\sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\tang\frac{\alpha}{2}}{2-\sec^2\frac{\alpha}{2}}$
31. $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{\cosec^2\frac{\alpha}{2}-2}$

f) In verschiedenartigen Funktionen des doppelten Bogens.

32. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$;	$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
33. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$;	$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$
34. $\cos 2\alpha$, $\cosec 2\alpha$;	$(1-\cos 2\alpha)\cosec 2\alpha$
35. $\cos 2\alpha$, $\cosec 2\alpha$;	$\frac{1}{(1+\cos 2\alpha)\cosec 2\alpha}$
36. $\tang 2\alpha$, $\cosec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\tang 2\alpha\cdot\cosec 2\alpha-1}{\tang 2\alpha\cdot\cosec 2\alpha+1}\right)}$
37. $\cot 2\alpha$, $\cosec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\cosec 2\alpha-\cot 2\alpha}{\cosec 2\alpha+\cot 2\alpha}\right)}$

g) Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen des einfachen und doppelten u. s. w. Bogens zusammengesetzt.

38. $\cot 2\alpha$, $\cot\alpha$;	$\cot\alpha-2\cot 2\alpha$
39. $\sec\alpha$, $\tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\tang\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha}{1+\tang^2\frac{\alpha}{2}}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
40. $\sec\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2};$	$\frac{2\sec\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2}}{1+\cot^2\frac{\alpha}{2}}$
41. $\sin 2\alpha,\ \cos\alpha,\ \sin\frac{\alpha}{2};$	$\frac{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\cos\alpha}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sin\frac{\alpha}{2}}$
42. $\sin 2\alpha,\ \cos\alpha,\ \sin\frac{\alpha}{2};$	$\frac{\cos\alpha-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$
43. $\sin(30+\alpha),\ \sin(30-\alpha),\ \cos(30+\alpha),\ \cos(30-\alpha);$	$\frac{\sin(30+\alpha)-\sin(30-\alpha)}{\cos(30+\alpha)+\cos(30-\alpha)}$
44. $\sin(30+\alpha),\ \sin(30-\alpha),\ \cos(30+\alpha),\ \cos(30-\alpha);$	$\frac{\cos(30-\alpha)-\cos(30+\alpha)}{\sin(30+\alpha)+\sin(30-\alpha)}$
45. $\sin(60+\alpha),\ \sin(60-\alpha),\ \cos(60+\alpha),\ \cos(60-\alpha);$	$\frac{\cos(60-\alpha)-\cos(60+\alpha)}{\sin(60+\alpha)+\sin(60-\alpha)}$
46. $\sin(60+\alpha),\ \sin(60-\alpha),\ \cos(60+\alpha),\ \cos(60-\alpha);$	$\frac{\sin(60+\alpha)-\sin(60-\alpha)}{\cos(60+\alpha)+\cos(60-\alpha)}$
47. $\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$
48. $\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)-\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$
49. $\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$

Anmerkung. Es lassen sich überhaupt für die *Tangente* und *Cotangente* so viel Ausdrücke angeben, als es Combinationen zwischen den Werthen für *Sinus* und *Cosinus* giebt; allein ein Theil derselben führt zu sehr verwickelten Formen, welche schwerlich je in Anwendung kommen.

D) Werthe für *Cotangente* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $\sin\alpha$;	$\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}{\sin\alpha}$
2. $\cos\alpha$;	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}$
3. $\mathrm{tang}\,\alpha$;	$\dfrac{1}{\mathrm{tang}\,\alpha}$
4. $\sec\alpha$;	$\dfrac{1}{\sqrt{(\sec^2\alpha-1)}}$
5. $\mathrm{cosec}\,\alpha$;	$\sqrt{(\mathrm{cosec}^2\alpha-1)}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6. $\sin\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$
7. $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$
8. $\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{1-\mathrm{tang}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}}$
9. $\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$
10. $\sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{2-\sec^2\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\left(\sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
11.	$cosec\,\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{cosec^2\frac{\alpha}{2}-2}{2\sqrt{\left(cosec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12.	$\sin 2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}+\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$
13.	$\cos 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)}$
14.	$tang\,2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1+tang^2\,2\alpha)}+1}{tang\,2\alpha}$
15.	$\cot 2\alpha$;	$\mp\sqrt{(1+\cot^2 2\alpha)}+\cot 2\alpha$
16.	$\sec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sec 2\alpha+1}{\sec 2\alpha-1}\right)}$
17.	$cosec\,2\alpha$;	$\frac{\sqrt{(cosec\,2\alpha+1)}+\sqrt{(cosec\,2\alpha-1)}}{\sqrt{(cosec\,2\alpha+1)}-\sqrt{(cosec\,2\alpha-1)}}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

18.	$\sin\alpha,\ \cos\alpha$;	$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
19.	$\sin\alpha,\ \sec\alpha$;	$\frac{1}{\sin\alpha\,.\,\sec\alpha}$
20.	$\cos\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha$
21.	$\sec\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha}{\sec\alpha}$
22.	$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tang\,\alpha$;	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\,.\,tang^2\,\alpha}$
23.	$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \sec\alpha$;	$\frac{\sin\alpha}{\sec\alpha-\cos\alpha}$
24.	$\sin\alpha,\ tang\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{\sin\alpha\,.\,cosec\,\alpha}{tang\,\alpha}$
25.	$\cos\alpha,\ tang\,\alpha,\ \sec\alpha$;	$\frac{\cos\alpha\,.\,\sec\alpha}{tang\,\alpha}$

e) In verschiedenartigen Funktionen des halben Bogens.

Ausgedrückt durch:	Formel:
26. $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}}$
27. $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}}$
28. $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}}$
29. $\tang\frac{\alpha}{2}, \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cot\frac{\alpha}{2} - \tang\frac{\alpha}{2}}{2}$
30. $\tang\frac{\alpha}{2}, \sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2 - \sec^2\frac{\alpha}{2}}{2\tang\frac{\alpha}{2}}$
31. $\cot\frac{\alpha}{2}, \cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cosec^2\frac{\alpha}{2} - 2}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$

f) In verschiedenartigen Funktionen des doppelten Bogens.

32. $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$;	$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$
33. $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$;	$\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
34. $\cos 2\alpha, \cosec 2\alpha$;	$\frac{1}{(1 - \cos 2\alpha)\cosec 2\alpha}$
35. $\cos 2\alpha, \cosec 2\alpha$;	$(1 + \cos 2\alpha)\cosec 2\alpha$
36. $\tang 2\alpha, \cosec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\tang 2\alpha\,.\,\cosec 2\alpha + 1}{\tang 2\alpha\,.\,\cosec 2\alpha - 1}\right)}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
37.	$cot\ 2\alpha,\ cosec\ 2\alpha;$	$\sqrt{\left(\frac{cosec\ 2\alpha + cot\ 2\alpha}{cosec\ 2\alpha - cot\ 2\alpha}\right)}$

g) **Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen der einfachen, doppelten u. s. w. Bogen zusammengesetzt.**

38.	$cot\ 2\alpha,\ cot\ \alpha;$	$\frac{1}{cot\ \alpha - 2\ cot\ 2\alpha}$
39.	$sec\ \alpha,\ tang\ \frac{\alpha}{2};$	$\frac{1 + tang^2 \frac{\alpha}{2}}{2\ tang \frac{\alpha}{2} . sec\ \alpha}$
40.	$sec\ \alpha,\ cot\ \frac{\alpha}{2};$	$\frac{1 + cot^2 \frac{\alpha}{2}}{2\ sec\ \alpha . cot \frac{\alpha}{2}}$
41.	$sin\ 2\alpha,\ cos\ \alpha,\ sin\ \frac{\alpha}{2};$	$\frac{\sqrt{(1 + sin\ 2\alpha)} - sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{(1 + sin\ 2\alpha)} - cos\ \alpha}$
42.	$sin\ 2\alpha,\ cos\ \alpha,\ sin\ \frac{\alpha}{2};$	$\frac{sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{(1 - sin\ 2\alpha)}}{cos\ \alpha - \sqrt{(1 - sin\ 2\alpha)}}$
43.	$sin\ (30 + \alpha),\ sin\ (30 - \alpha),\ cos\ (30 + \alpha),\ cos\ (30 - \alpha);$	$\frac{cos\ (30 + \alpha) + cos\ (30 - \alpha)}{sin\ (30 + \alpha) - sin\ (30 - \alpha)}$
44.	$sin\ (30 + \alpha),\ sin\ (30 - \alpha),\ cos\ (30 + \alpha),\ cos\ (30 - \alpha);$	$\frac{sin\ (30 + \alpha) + sin\ (30 - \alpha)}{cos\ (30 - \alpha) - cos\ (30 + \alpha)}$
45.	$sin\ (60 + \alpha),\ sin\ (60 - \alpha),\ cos\ (60 + \alpha),\ cos\ (60 - \alpha);$	$\frac{sin\ (60 + \alpha) + sin\ (60 - \alpha)}{cos\ (60 - \alpha) - cos\ (60 + \alpha)}$
46.	$sin\ (60 + \alpha),\ sin\ (60 - \alpha),\ cos\ (60 + \alpha),\ cos\ (60 - \alpha);$	$\frac{cos\ (60 + \alpha) + cos\ (60 - \alpha)}{sin\ (60 + \alpha) - sin\ (60 - \alpha)}$
47.	$tang\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right),\ tang\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{2}{tang\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) - tang\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}$
48.	$cot\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right),\ cot\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{2\left[cot\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) . cot\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{cot\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) - cot\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
49. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$, $\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}$

E) Werthe für die *Secante* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $\sin\alpha$;	$\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}$
2. $\cos\alpha$;	$\frac{1}{\cos\alpha}$
3. $\tang\alpha$;	$\sqrt{(1+\tang^2\alpha)}$
4. $\cot\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}}{\cot\alpha}$
5. $\cosec\alpha$;	$\frac{\cosec\alpha}{\sqrt{(\cosec^2\alpha-1)}}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6. $\sin\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$
7. $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$
8. $\tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1+\tang^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tang^2\frac{\alpha}{2}}$
9. $\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\cot^2\frac{\alpha}{2}+1}{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
10. $sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{sec^2\frac{\alpha}{2}}{2 - sec^2\frac{\alpha}{2}}$
11. $cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{cosec^2\frac{\alpha}{2}}{cosec^2\frac{\alpha}{2} - 2}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12. $sin\,2\alpha$;	$\frac{2}{\sqrt{(1 + sin\,2\alpha)} + \sqrt{(1 - sin\,2\alpha)}}$
13. $cos\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1 + cos\,2\alpha}\right)}$
14. $tang\,2\alpha$;	$\frac{\sqrt{2\,(1 + tang^2\,2\alpha - \sqrt{(1 + tang^2\,2\alpha)})}}{tang\,2\alpha}$
15. $cot\,2\alpha$;	$\sqrt{2\,(1 + cot^2\,2\alpha - cot\,2\alpha\,.\,\sqrt{(1 + cot^2\,2\alpha)})}$
16. $sec\,2\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2\,sec\,2\alpha}{sec\,2\alpha + 1}\right)}$
17. $cosec\,2\alpha$;	$\sqrt{2\,cosec\,2\alpha\,(cosec\,2\alpha - \sqrt{(cosec^2\,2\alpha - 1)})}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

18. $sin\,\alpha$, $tang\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha}{sin\,\alpha}$
19. $sin\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{1}{sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha}$
20. $tang\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$
21. $cot\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha}{cot\,\alpha}$
22. $sin\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{1}{sin\,\alpha\,.\,\sqrt{(cosec^2\,\alpha - 1)}}$
23. $sin\,\alpha$, $tang\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha\,(cosec\,\alpha - 1)}{1 - sin\,\alpha}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
24.	$\sin\alpha,\ \mathrm{tang}\,\alpha,\ \mathrm{cosec}\,\alpha;$	$\frac{1}{(\mathrm{cosec}\,\alpha - \sin\alpha)\,\mathrm{tang}\,\alpha}$
25.	$\sin\alpha,\ \cot\alpha,\ \mathrm{cosec}\,\alpha;$	$\frac{\cot\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \sin\alpha}$
26.	$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \mathrm{cosec}\,\alpha;$	$\frac{\sin\alpha\,.\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{\cos\alpha}$
27.	$\cos\alpha,\ \mathrm{tang}\,\alpha,\ \cot\alpha;$	$\frac{\mathrm{tang}\,\alpha\,.\,\cot\alpha}{\cos\alpha}$

e) Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen des einfachen, halben und doppelten Bogens zusammengesetzt.

28.	$\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2};$	$\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$
29.	$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},\ \cot\frac{\alpha}{2};$	$\frac{\cot\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}$
30.	$\sin\alpha,\ \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2};$	$\frac{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha - \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}$
31.	$\sin\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2};$	$\frac{1}{\sin\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2} - 1}$
32.	$\sin\alpha,\ \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2};$	$\frac{1}{1 - \sin\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}$
33.	$\sin\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2};$	$\frac{\cot\frac{\alpha}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}$
34.	$\mathrm{tang}\,\alpha,\ \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2};$	$1 + \mathrm{tang}\,\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
35.	$\cot\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\cot\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2}+1}{\cot\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2}}$
36.	$\operatorname{cosec}\alpha,\ \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$;	$\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}-1$
37.	$\operatorname{cosec}\alpha,\ \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}$
38.	$\operatorname{cosec}\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\operatorname{cosec}\alpha}$
39.	$\operatorname{cosec}\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cosec}\alpha\,.\,\cot\frac{\alpha}{2}-1}$
40.	$\sin 2\alpha,\ \sin\alpha$;	$\dfrac{2\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$
41.	$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha$;	$\dfrac{2\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
42.	$\operatorname{cosec}\alpha,\ \operatorname{cosec} 2\alpha$;	$\dfrac{2\operatorname{cosec} 2\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}$
43.	$\sin 2\alpha,\ \sin\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sin\frac{\alpha}{2}}$
44.	$\sin 2\alpha,\ \sin\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}+\sin\frac{\alpha}{2}}$
45.	$\sin\alpha,\ \operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\dfrac{\operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\alpha}$
46.	$\sin\alpha,\ \operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\dfrac{1}{(1-\sin\alpha)\,.\,\operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
47.	$\sin\alpha,\ \tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1}{(1+\sin\alpha)\cdot\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
48.	$\sin\alpha,\ \tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\sin\alpha}$
49.	$\sin\alpha,\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1}{(1+\sin\alpha)\cdot\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
50.	$\sin\alpha,\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\sin\alpha}$
51.	$\sin\alpha,\ \cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\alpha}$
52.	$\sin\alpha,\ \cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1}{(1-\sin\alpha)\cdot\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
53.	$\sin\alpha,\ \sin(60+\alpha)$;	$\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}{\sin(60+\alpha)-\frac{1}{2}\sin\alpha}$
54.	$\sin\alpha,\ \sin(60-\alpha)$;	$\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}{\sin(60-\alpha)+\frac{1}{2}\sin\alpha}$
55.	$\sin\alpha,\ \cos(60+\alpha)$;	$\frac{1}{2\left(\cos(60+\alpha)+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha\right)}$
56.	$\sin\alpha,\ \cos(60-\alpha)$;	$\frac{1}{2\left(\cos(60-\alpha)-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha\right)}$
57.	$\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$
58.	$\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right),\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$
59.	$\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
60.	$\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{1}{2\cos\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
61.	$\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{1}{2\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right).\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
62.	$\sin(30+\alpha),\ \sin(30-\alpha);$	$\frac{1}{\sin(30+\alpha)+\sin(30-\alpha)}$
63.	$\cos(30+\alpha),\ \cos(30-\alpha);$	$\frac{\sqrt{3}}{\cos(30+\alpha)+\cos(30-\alpha)}$
64.	$\cos(60+\alpha),\ \cos(60-\alpha);$	$\frac{1}{\cos(60+\alpha)+\cos(60-\alpha)}$
65.	$\sin(60+\alpha),\ \sin(60-\alpha);$	$\frac{\sqrt{3}}{\sin(60+\alpha)+\sin(60-\alpha)}$

F) Werthe für die *Cosecante* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	$\sin\alpha;$	$\frac{1}{\sin\alpha}$
2.	$\cos\alpha;$	$\frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}$
3.	$\tan\!g\,\alpha;$	$\frac{\sqrt{(1+\tan\!g^2\alpha)}}{\tan\!g\,\alpha}$
4.	$\cot\alpha;$	$\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}$
5.	$\sec\alpha;$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{(\sec^2\alpha-1)}}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

6.	$\sin\frac{1}{2}\alpha;$	$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}.\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
7.	$\cos\frac{1}{2}\alpha$;	$\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}}$
8.	$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha$;	$\dfrac{1+\mathrm{tang}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}}$
9.	$\cot\frac{1}{2}\alpha$;	$\dfrac{1+\cot^2\frac{\alpha}{2}}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$
10.	$\sec\frac{1}{2}\alpha$;	$\dfrac{\sec^2\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\left(\sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}$
11.	$\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\left(\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}$

c) In gleichartigen Funktionen des doppelten Bogens.

12.	$\sin 2\alpha$;	$\dfrac{2}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$
13.	$\cos 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\dfrac{2}{1-\cos 2\alpha}\right)}$
14.	$\mathrm{tang}\,2\alpha$;	$\dfrac{\sqrt{2\left(1+\mathrm{tang}^2 2\alpha+\sqrt{(1+\mathrm{tang}^2 2\alpha)}\right)}}{\mathrm{tang}\,2\alpha}$
15.	$\cot 2\alpha$;	$\sqrt{2\left(1+\cot^2 2\alpha+\cot 2\alpha\,.\,\sqrt{(1+\cot^2 2\alpha)}\right)}$
16.	$\sec 2\alpha$;	$\sqrt{\left(\dfrac{2\sec 2\alpha}{\sec 2\alpha-1}\right)}$
17.	$\mathrm{cosec}\,2\alpha$;	$\dfrac{2\sqrt{(\mathrm{cosec}\,2\alpha)}}{\sqrt{(\mathrm{cosec}\,2\alpha+1)}-\sqrt{(\mathrm{cosec}\,2\alpha-1)}}$

d) In verschiedenartigen Funktionen des einfachen Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
18.	$cos\,\alpha,\ tang\,\alpha$;	$\frac{1}{cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha}$
19.	$cos\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$\frac{cot\,\alpha}{cos\,\alpha}$
20.	$tnng\,\alpha,\ sec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha}{tang\,\alpha}$
21.	$cos\,\alpha,\ sec\,\alpha$;	$\frac{1}{cos\,\alpha\,.\,\sqrt{(sec^2\,\alpha - 1)}}$
22.	$sin\,\alpha,\ tang\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha\,.\,cot\,\alpha}{sin\,\alpha}$
23.	$sin\,\alpha,\ cos\,\alpha,\ sec\,\alpha$;	$\frac{cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha}{sin\,\alpha}$
24.	$sec\,\alpha,\ cos\,\alpha,\ tang\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha}{sec\,\alpha - cos\,\alpha}$
25.	$sec\,\alpha,\ cos\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$\frac{1}{(sec\,\alpha - cos\,\alpha)\,cot\,\alpha}$

e) In verschiedenartigen Funktionen des halben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
26.	$sin\frac{\alpha}{2},\ cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{2\,sin\frac{\alpha}{2}\,.\,cos\frac{\alpha}{2}}$
27.	$sin\frac{\alpha}{2},\ cos\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{1-\left(\pm sin\frac{\alpha}{2} \mp cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$
28.	$sin\frac{\alpha}{2},\ tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{tang\frac{\alpha}{2}}{2\,sin^2\frac{\alpha}{2}}$
29.	$sin\frac{\alpha}{2},\ sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{sec\frac{\alpha}{2}}{2\,sin\frac{\alpha}{2}}$
30.	$cos\frac{\alpha}{2},\ tang\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{1}{2\,cos^2\frac{\alpha}{2}\,.\,tang\frac{\alpha}{2}}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
31.	$\cos\frac{\alpha}{2},\ \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\cot\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$
32.	$\cos\frac{\alpha}{2},\ \sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\left(\sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}$
33.	$\cos\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$
34.	$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},\ \cot\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}{2}$
35.	$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},\ \sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\sec^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}$
36.	$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}}{2}$
37.	$\cot\frac{\alpha}{2},\ \sec\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\sec^2\frac{\alpha}{2}}{2}$
38.	$\cot\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$
39.	$\sec\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}}{2}$
40.	$\sec\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}$;	$\dfrac{\sec^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}}{2\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sec\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\mathrm{cosec}\,\frac{\alpha}{2}}{\sec\frac{\alpha}{2}}$

f) Vermischte Ausdrücke aus den Funktionen des einfachen, halben, doppelten u. s. w. Bogens zusammengesetzt.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
41.	$\cos\alpha,\ \sin 2\alpha;$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}-\cos\alpha}$
42.	$\cos\alpha,\ \sin 2\alpha;$	$\dfrac{1}{\cos\alpha-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}$
43.	$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha;$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\cos^2\alpha-\cos 2\alpha)}}$
44.	$\cos\alpha,\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\\ \cot\frac{\alpha}{2}\end{array}\right.;$	$\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)}=\dfrac{\cot\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha}$
45.	$\cos\alpha,\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\\ \cot\frac{\alpha}{2}\end{array}\right.;$	$\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1}{(1-\cos\alpha)\cot\frac{\alpha}{2}}$
46.	$\cot\alpha,\ \cot\frac{\alpha}{2};$	$\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$
47.	$\cot\alpha,\ \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2};$	$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}+\cot\alpha$
48.	$\cos\alpha,\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)\\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right.;$	$1-\dfrac{\operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{1-\cos\alpha\,.\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
49.	$\cos\alpha,\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)\\ \cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right.;$	$1-\dfrac{\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{1-\cos\alpha\,.\operatorname{tang}\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
50.	$\sin(30+\alpha),\ \sin(30-\alpha);$	$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin(30+\alpha)-\sin(30-\alpha)}$
51.	$\cos(30+\alpha),\ \cos(30-\alpha);$	$\dfrac{1}{\cos(30-\alpha)-\cos(30+\alpha)}$
52.	$\sin(60+\alpha),\ \sin(60-\alpha);$	$\dfrac{1}{\sin(60+\alpha)-\sin(60-\alpha)}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
53.	$\cos(60+\alpha),\ \cos(60-\alpha)$;	$\frac{\sqrt{3}}{\cos(60-\alpha)-\cos(60+\alpha)}$
54.	$\cos\alpha,\ \sin(60+\alpha)$;	$\frac{1}{2(\sin(60+\alpha)-\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\cos\alpha)}$
55.	$\cos\alpha,\ \sin(60-\alpha)$;	$\frac{1}{2(\frac{1}{2}.\sqrt{3}.\cos\alpha-\sin(60-\alpha))}$
56.	$\cos\alpha,\ \cos(60+\alpha)$;	$\frac{\frac{1}{2}.\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos(60+\alpha)}$
57.	$\cos\alpha,\ \cos(60-\alpha)$;	$\frac{\frac{1}{2}.\sqrt{3}}{\cos(60-\alpha)-\frac{1}{2}\cos\alpha}$
58.	$\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1}{2\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-1}$
59.	$\sin\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1}{1-2\sin^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
60.	$\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1+\tang^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tang^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$
61.	$\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+1}{\tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-1}$
62.	$\cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\cot^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+1}{\cot^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)-1}$
63.	$\cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{1+\cot^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\cot^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
64.	$\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ \tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{\tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-\tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
65.	$tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right),\ cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}{tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)-cot\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)}$
66.	$tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right),\ cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right);$	$\frac{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)+tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}{cot\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)-tang\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)}$

G) Werthe für *Sinus versus* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	$sin\ \alpha;$	$1-\sqrt{(1-sin^2\alpha)}$
2.	$cos\ \alpha;$	$1-cos\ \alpha$
3.	$tang\ \alpha;$	$\frac{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}-1}{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}$
4.	$cot\ \alpha;$	$\frac{\sqrt{(1+cot^2\alpha)}-cot\ \alpha}{\sqrt{(1+cot^2\alpha)}}$
5.	$sec\ \alpha;$	$\frac{sec\ \alpha-1}{sec\ \alpha}$
6.	$cosec\ \alpha;$	$\frac{cosec\ \alpha-\sqrt{(cosec^2\alpha-1)}}{cosec\ \alpha}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

7.	$sin\frac{\alpha}{2};$	$2\ sin^2\frac{\alpha}{2}$
8.	$cos\frac{\alpha}{2};$	$2\left(1-cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$
9.	$tang\frac{\alpha}{2};$	$\frac{2\ tang^2\frac{\alpha}{2}}{1+tang^2\frac{\alpha}{2}}$
10.	$cot\frac{\alpha}{2};$	$\frac{2}{cot^2\frac{\alpha}{2}+1}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
11.	$sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2\left(sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}{sec^2\frac{\alpha}{2}}$
12.	$cosec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{2}{cosec^2\frac{\alpha}{2}}$

c) In vermischten Funktionen des einfachen, doppelten u. s. w. Bogens.

13.	$sin\,\alpha,\ tang\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha - sin\,\alpha}{tang\,\alpha}$
14.	$sin\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$1 - sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$
15.	$tang\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha - 1}{tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha}$
16.	$cot\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha - cot\,\alpha}{cosec\,\alpha}$
17.	$sin\,\alpha,\ sin\,2\alpha$;	$\frac{sin\,\alpha - \frac{1}{2}\,sin\,2\alpha}{sin\,\alpha}$
18.	$sin\frac{\alpha}{2},\ cos\frac{\alpha}{2}$;	$1 - cos^2\frac{\alpha}{2} + sin^2\frac{\alpha}{2}$

H) Werthe für *Cosinus versus* α.

a) In gleichartigen Funktionen desselben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	$sin\,\alpha$;	$1 - sin\,\alpha$
2.	$cos\,\alpha$;	$1 - \sqrt{(1 - cos^2\alpha)}$
3.	$tang\,\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1 + tang^2\alpha)} - tang\,\alpha}{\sqrt{(1 + tang^2\alpha)}}$
4.	$cot\,\alpha$;	$\frac{\sqrt{(1 + cot^2\alpha)} - 1}{\sqrt{(1 + cot^2\alpha)}}$
5.	$sec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha - \sqrt{(sec^2\alpha - 1)}}{sec\,\alpha}$
6.	$cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha}$

b) In gleichartigen Funktionen des halben Bogens.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
7.	$\sin\frac{\alpha}{2}$;	$1-2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\sqrt{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$
8.	$\cos\frac{\alpha}{2}$;	$1-2\cos\frac{\alpha}{2}\,.\,\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$
9.	$\tan\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
10.	$\cot\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\left(1-\cot\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1+\cot^2\frac{\alpha}{2}}$
11.	$\sec\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\sec^2\frac{\alpha}{2}-2\,.\,\sqrt{\left(\sec^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}$
12.	$\mathrm{cosec}\frac{\alpha}{2}$;	$\frac{\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}-2\,.\,\sqrt{\left(\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}}{\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{2}}$

c) In vermischten Funktionen des einfachen, doppelten u. s. w. Bogens.

13.	$\cos\alpha$, $\tan\alpha$;	$1-\cos\alpha\,.\,\tan\alpha$
14.	$\cos\alpha$, $\cot\alpha$;	$\frac{\cot\alpha-\cos\alpha}{\cot\alpha}$
15.	$\tan\alpha$, $\sec\alpha$;	$\frac{\sec\alpha-\tan\alpha}{\sec\alpha}$
16.	$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$;	$1-2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}$
17.	$\sin(45-\frac{1}{2}\alpha)$;	$2\sin^2(45-\frac{1}{2}\alpha)$

Ausgedrückt durch:	Formel:
18. $tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$;	$\frac{2}{tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)+1}$

Anmerkung. Da der Gebrauch der *Sinus versus* und *Cosinus versus* in den Operationen der trigonometrischen Analysis sehr gering ist, so hat man sich auf obige Formeln für dieselben beschränkt, und diese Funktionen nicht weiter in die folgenden Tafeln aufgenommen.

IV. Formeln für die Funktionen des halben Bogens.

A) Ausdrücke für den *Sinus* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $\sin\alpha$;	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1+\sin\alpha)}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1-\sin\alpha)}$
2. $\cos\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}$
3. $tang\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}-1}{2\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}\right)}$
4. $\cot\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}-\cot\alpha}{2\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}}\right)}$
5. $\sec\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}\right)}$
6. $cosec\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{cosec\,\alpha-\sqrt{(cosec^2\alpha-1)}}{2\,cosec\,\alpha}\right)}$

B) Ausdrücke für den *Cosinus* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $\sin\alpha$;	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1+\sin\alpha)}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(1-\sin\alpha)}$
2. $\cos\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}$
3. $tang\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}+1}{2\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2\alpha)}}\right)}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
4. *cot* α;	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}+\cot\alpha}{2\sqrt{(1+\cot^2\alpha)}}\right)}$
5. *sec* α;	$\sqrt{\left(\frac{1+\sec\alpha}{2\sec\alpha}\right)}$
6. *cosec* α;	$\sqrt{\left(\frac{\operatorname{cosec}\alpha+\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}}{2\operatorname{cosec}\alpha}\right)}$

C) Ausdrücke für die *Tangente* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. *sin* α;	$\frac{1-\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}{\sin\alpha}$
2. *cos* α;	$\frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}{1+\cos\alpha}=\sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)}$
3. *tang* α;	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)}+1}$
4. *cot* α;	$\frac{1}{\sqrt{(\cot^2\alpha+1)}+\cot\alpha}$
5. *sec* α;	$\sqrt{\left(\frac{\sec\alpha-1}{\sec\alpha+1}\right)}$
6. *cosec* α;	$\operatorname{cosec}\alpha-\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)}$
7. *sin* α, *cos* α;	$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
8. *cosec* α, *cot* α;	$\operatorname{cosec}\alpha-\cot\alpha$

D) Ausdrücke für die *Cotangente* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. *sin* α;	$\frac{\sin\alpha}{1-\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}$
2. *cos* α;	$\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}=\sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)}$
3. *tang* α;	$\frac{\sqrt{(1+\tan^2\alpha)}+1}{\tan\alpha}$
4. *cot* α;	$\sqrt{(\cot^2\alpha+1)}+\cot\alpha$

Ausgedrückt durch:	Formel:
5. $sec\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{sec\,\alpha + 1}{sec\,\alpha - 1}\right)}$
6. $cosec\,\alpha$;	$cosec\,\alpha + \sqrt{(cosec^2\,\alpha - 1)}$
7. $sin\,\alpha,\ cos\,\alpha$;	$\frac{1 + cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{1 - cos\,\alpha}$
8. $cot\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$cosec\,\alpha + cot\,\alpha$

E) Ausdrücke für die *Secante* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $sin\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1 + \sqrt{(1 - sin^2\,\alpha)}}\right)} = \frac{\sqrt{[2 - 2.\sqrt{(1 - sin^2\,\alpha)}]}}{sin\,\alpha}$
2. $cos\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1 + cos\,\alpha}\right)}$
3. $tang\,\alpha$;	$\frac{\sqrt{2[1 + tang^2\,\alpha - \sqrt{(1 + tang^2\,\alpha)}]}}{tang\,\alpha}$
4. $cot\,\alpha$;	$\sqrt{2[1 + cot^2\,\alpha - cot\,\alpha\,.\sqrt{(1 + cot^2\,\alpha)}]}$
5. $sec\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2\,sec\,\alpha}{1 + sec\,\alpha}\right)}$
6. $cosec\,\alpha$;	$\sqrt{2\,cosec\,\alpha\,[cosec\,\alpha - \sqrt{(cosec^2\,\alpha - 1)}]}$
7. $sin\,\alpha,\ tang\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2\,tang\,\alpha}{sin\,\alpha + tang\,\alpha}\right)}$
8. $sin\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1 + sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha}\right)}$
9. $cos\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$cosec\,\alpha\,.\sqrt{2(1 - cos\,\alpha)}$

F) Ausdrücke für die *Cosecante* $\frac{1}{2}\alpha$.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $sin\,\alpha$;	$\frac{\sqrt{2[1 + \sqrt{(1 - sin^2\,\alpha)}]}}{sin\,\alpha}$
2. $cos\,\alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1 - cos\,\alpha}\right)}$

Ausgedrückt durch:	Formel:
3. $tang\ \alpha$;	$\frac{\sqrt{2[1+tang^2\alpha+\sqrt{(1+tang^2\alpha)}]}}{tang\ \alpha}$
4. $cot\ \alpha$;	$\sqrt{2[1+cot\ \alpha+cot\ \alpha.\sqrt{(1+cot^2\alpha)}]}$
5. $sec\ \alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2\ sec\ \alpha}{sec\ \alpha-1}\right)}$
6. $cosec\ \alpha$;	$\sqrt{2\ cosec\ \alpha[cosec\ \alpha+\sqrt{(cosec^2\alpha-1)}]}$
7. $sin\ \alpha,\ tang\ \alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2\ tang\ \alpha}{tang\ \alpha-sin\ \alpha}\right)}$
8. $sin\ \alpha,\ cot\ \alpha$;	$\sqrt{\left(\frac{2}{1-sin\ \alpha.cot\ \alpha}\right)}$
9. $cos\ \alpha,\ cosec\ \alpha$;	$cosec\ \alpha.\sqrt{2(1+cos\ \alpha)}$

V. Formeln für die Funktionen des doppelten Bogens.

A) Ausdrücke für den *Sinus* 2α.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $sin\ \alpha$;	$2\ sin\ \alpha.\sqrt{(1-sin^2\alpha)}$
2. $cos\ \alpha$;	$2\ cos\ \alpha.\sqrt{(1-cos^2\alpha)}$
3. $tang\ \alpha$;	$\frac{2\ tang\ \alpha}{1+tang^2\alpha}$
4. $cot\ \alpha$;	$\frac{2\ cot\ \alpha}{1+cot^2\alpha}$
5. $sin\ \alpha,\ cos\ \alpha$;	$2\ sin\ \alpha.cos\ \alpha$
6. $sin\ \alpha,\ tang\ \alpha$;	$\frac{2\ sin^2\alpha}{tang\ \alpha}$
7. $cos\ \alpha,\ cot\ \alpha$;	$\frac{2\ cos^2\alpha}{cot\ \alpha}$
8. $tang\ \alpha,\ cot\ \alpha$;	$\frac{2}{tang\ \alpha+cot\ \alpha}$
9. $sin\ \alpha,\ sec\ \alpha$;	$\frac{2\ sin\ \alpha}{sec\ \alpha}$

	Ausgedrückt durch:	Formel:
10.	*tang* α, *sec* α;	$\frac{2\,tang\,\alpha}{sec^2\,\alpha}$
11.	*cot* α, *cosec* α;	$\frac{2\,cot\,\alpha}{cosec^2\,\alpha}$

B) Ausdrücke für den *Cosinus* 2α.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	*sin* α;	$1 - 2\,sin^2\,\alpha$
2.	*cos* α;	$2\,cos^2\,\alpha - 1$
3.	*tang* α;	$\frac{1 - tang^2\,\alpha}{1 + tang^2\,\alpha}$
4.	*cot* α;	$\frac{cot^2\,\alpha - 1}{cot^2 + 1}$
5.	*sec* α;	$\frac{2 - sec^2\,\alpha}{sec^2\,\alpha}$
6.	*cosec* α;	$\frac{cosec^2\,\alpha - 2}{cosec^2\,\alpha}$
7.	*sin* α, *cos* α;	$cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$
8.	*tang* α, *cot* α;	$\frac{cot\,\alpha - tang\,\alpha}{cot\,\alpha + tang\,\alpha}$

C) Ausdrücke für die *Tangente* 2α.

	Ausgedrückt durch:	Formel:
1.	*tang* α;	$\frac{2\,tang\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha}$
2.	*cot* α;	$\frac{2\,cot\,\alpha}{cot^2\,\alpha - 1}$
3.	*sin* α, *cos* α;	$\frac{2\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}{1 - 2\,sin^2\,\alpha} = \frac{2\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}{2\,cos^2\,\alpha - 1}$
4.	*tang* α, *cot* α;	$\frac{2}{cot\,\alpha - tang\,\alpha}$
5.	*tang* α, *sec* α;	$\frac{2\,tang\,\alpha}{2 - sec^2\,\alpha}$
6.	*cot* α, *cosec* α;	$\frac{2\,cot\,\alpha}{cosec^2\,\alpha - 2}$

D) Ausdrücke für die *Cotangente* 2α.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $tang\,\alpha$;	$\frac{1 - tang^2\,\alpha}{2\,tang\,\alpha}$
2. $cot\,\alpha$;	$\frac{cot^2\,\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}$
3. $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$;	$\frac{1 - 2\,sin^2\,\alpha}{2\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha} = \frac{2\,cos^2\,\alpha - 1}{2\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}$
4. $tang\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{cot\,\alpha - tang\,\alpha}{2}$
5. $tang\,\alpha$, $sec\,\alpha$;	$\frac{2 - sec^2\,\alpha}{2\,tang\,\alpha}$
6. $cot\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec^2\,\alpha - 2}{2\,cot\,\alpha}$

E) Ausdrücke für die *Secante* 2α.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $sin\,\alpha$;	$\frac{1}{1 - 2\,sin^2\,\alpha}$
2. $cos\,\alpha$;	$\frac{1}{2\,cos^2\,\alpha - 1}$
3. $tang\,\alpha$;	$\frac{1 + tang^2\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha}$
4. $cot\,\alpha$;	$\frac{cot^2\,\alpha + 1}{cot^2\,\alpha - 1}$
5. $sec\,\alpha$;	$\frac{sec^2\,\alpha}{2 - sec^2\,\alpha}$
6. $cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec^2\,\alpha}{cosec^2\,\alpha - 2}$
7. $tang\,\alpha$, $cot\,\alpha$;	$\frac{cot\,\alpha + tang\,\alpha}{cot\,\alpha - tang\,\alpha}$
8. $sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$;	$\frac{sec^2\,\alpha\,.\,cosec^2\,\alpha}{cosec^2\,\alpha - sec^2\,\alpha}$
9. $tang\,(45 + \alpha)$, $tang\,(45 - \alpha)$;	$\frac{tang\,(45 + \alpha) + tang\,(45 - \alpha)}{2}$

F) Ausdrücke für die *Coseccante* 2α.

Ausgedrückt durch:	Formel:
1. $tang\,\alpha$;	$\frac{1+tang^2\alpha}{2\,tang\,\alpha}$
2. $cot\,\alpha$;	$\frac{1+cot^2\alpha}{2\,cot\,\alpha}$
3. $sin\,\alpha,\ cos\,\alpha$;	$\frac{1}{2\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}$
4. $sin\,\alpha,\ sec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha}{2\,sin\,\alpha}$
5. $cos\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec\,\alpha}{2\,cos\,\alpha}$
6. $tang\,\alpha,\ cot\,\alpha$;	$\frac{tang\,\alpha+cot\,\alpha}{2}$
7. $tang\,\alpha,\ sec\,\alpha$;	$\frac{sec^2\alpha}{2\,tang\,\alpha}$
8. $cot\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{cosec^2\alpha}{2\,cot\,\alpha}$
9. $sec\,\alpha,\ cosec\,\alpha$;	$\frac{sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha}{2}$

VI. Formeln für die Summen oder Differenzen verschiedener Funktionen desselben Bogens, und für die Summen oder Differenzen der Quadrate dieser Funktionen.

A) Ausdrücke für die Summe oder Differenz zweier Funktionen desselben Bogens.

1. $$sin\,\alpha+cos\,\alpha = sin\,(45+\alpha)\,.\,\sqrt{2} = cos\,(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{(1+sin\,2\alpha)}$$

2. $$cos\,\alpha-sin\,\alpha = sin\,(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2} = cos\,(45+\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{(1-sin\,2\alpha)}$$

3. $$tang\,\alpha + cot\,\alpha = \frac{2}{sin\,2\alpha} = \frac{1}{sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha} = 2\,cosec\,2\alpha = sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$$

4. $$cot\,\alpha - tang\,\alpha = \frac{2}{tang\,2\alpha} = 2\,cot\,2\alpha$$

5. $$tang\,\alpha + sec\,\alpha = cot\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{tang\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)} = tang\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{sec\,\alpha - tang\,\alpha}$$

6. $$sec\,\alpha - tang\,\alpha = tang\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = cot\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{cos\,vers\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{sec\,\alpha + tang\,\alpha}$$

7. $$cot\,\alpha + cosec\,\alpha = cot\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{cosec\,\alpha - cot\,\alpha} = \frac{1 + cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

8. $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$

$= \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha}$

$= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

9. $\sec \alpha - \cos \alpha = \operatorname{tang} \alpha \,.\, \sin \alpha$

$= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$

10. $\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha = \cot \alpha \,.\, \cos \alpha$

$= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}$

$= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$

B) **Ausdrücke für die Summe oder Differenz der Quadrate zweier Funktionen desselben oder des halben Bogens.**

1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
2. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$
3. $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{4}{\sin^2 2\alpha}$

$= \frac{\sec^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

$= \frac{1}{\sin^2 \alpha \,.\, \cos^2 \alpha}$

$= \sec^2 \alpha \,.\, \operatorname{cosec}^2 \alpha$

$= (\operatorname{tang} \alpha + \cot \alpha)^2$

4. $\sec^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 \alpha = 1$
5. $\operatorname{cosec}^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$
6. $\operatorname{cosec}^2 \alpha - \sec^2 \alpha = 4 \cot 2\alpha \,.\, \operatorname{cosec} 2\alpha$
7. $\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = \sin^2 \alpha$
8. $\cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$

9. $tang \frac{\alpha}{2} + cot\, \alpha = \frac{1}{sin\, \alpha} = cosec\, \alpha$

10. $cot\, \alpha - 2\, cot\, 2\alpha = tang\, \alpha$

Anmerkung. Es sind hier nur diejenigen Combinationen zweier Funktionen aufgenommen, die einigermaſsen bequeme Ausdrücke geben.

VII. Formeln für die Produkte und Quotienten verschiedener Funktionen desselben Bogens.

A) Produkte verschiedener Funktionen desselben Bogens.

1. $sin\, \alpha \,.\, sin\, \alpha = \frac{1 - cos\, 2\alpha}{2}$

2. $sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = \frac{sin\, 2\alpha}{2}$

3. $sin\, \alpha \,.\, tang\, \alpha = sec\, \alpha - cos\, \alpha = \frac{1}{cot\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha} = \frac{tang\, \alpha}{cosec\, \alpha}$

4. $sin\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = cos\, \alpha$

5. $sin\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = tang\, \alpha$

6. $sin\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = 1$

7. $cos\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = \frac{1 + cos\, 2\alpha}{2}$

8. $cos\, \alpha \,.\, tang\, \alpha = sin\, \alpha$

9. $cos\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = cosec\, \alpha - sin\, \alpha = \frac{1 - sin^2\, \alpha}{sin\, \alpha} = \frac{cos^2\, \alpha}{sin\, \alpha}$

10. $cos\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = 1$

11. $cos\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = \frac{1}{tang\, \alpha} = cot\, \alpha$

12. $tang\, \alpha \,.\, tang\, \alpha = \frac{1 - cos\, 2\alpha}{1 + cos\, 2\alpha}$

13. $tang\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = 1$

14. $tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = \frac{1}{cosec\, \alpha - sin\, \alpha} = \frac{tang\, \alpha}{cos\, \alpha} = \frac{sec\, \alpha}{cot\, \alpha}$

15. $tang\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = \frac{1}{cos\, \alpha} = sec\, \alpha$

16. $\cot\alpha \,.\, \cot\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

17. $\cot\alpha \,.\, \sec\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$

18. $\cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{1}{\sec\alpha - \cos\alpha}$

19. $\sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

B) Quotienten verschiedener Funktionen desselben Bogens.

1. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha$

2. $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha$

3. $\dfrac{\sin\alpha}{\cot\alpha} = \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha = \sec\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha}$

4. $\dfrac{\sin\alpha}{\sec\alpha} = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

5. $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \sin^2\alpha$

6. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$

7. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = \operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha = \dfrac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

8. $\dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha$

9. $\dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{\sec^2\alpha} = \cos^2\alpha$

10. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \dfrac{1}{2\operatorname{cosec} 2\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

11. $\dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\alpha} = \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

12. $\dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cot\alpha \,.\, \cos\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

13. $\dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\cot\alpha} = \operatorname{tang}^2\alpha$

14. $\frac{tang\,\alpha}{sec\,\alpha} = tang\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = sin\,\alpha = \frac{sin\,2\alpha}{2\,cos\,\alpha} = \frac{1}{cosec\,\alpha}$

15. $\frac{tang\,\alpha}{cosec\,\alpha} = tang\,\alpha\,.\,sin\,\alpha = sec\,\alpha - cos\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha}$

16. $\frac{cot\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{tang\,\alpha\,.\,sin\,\alpha} = \frac{1}{sec\,\alpha - cos\,\alpha} = \frac{cosec\,\alpha}{tang\,\alpha} = cosec\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$

17. $\frac{cot\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{tang\,\alpha\,.\,cos\,\alpha} = \frac{1}{sin\,\alpha} = cosec\,\alpha$

18. $\frac{cot\,\alpha}{tang\,\alpha} = \frac{1}{tang^2\,\alpha} = cot^2\,\alpha$

19. $\frac{cot\,\alpha}{sec\,\alpha} = cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = cosec\,\alpha - sin\,\alpha = cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = \frac{1 - sin^2\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{cos^2\,\alpha}{sin\,\alpha}$

20. $\frac{cot\,\alpha}{cosec\,\alpha} = cos\,\alpha$

21. $\frac{sec\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha\,.\,sin\,\alpha} = \frac{2}{sin\,2\alpha}$

22. $\frac{sec\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cos^2\,\alpha} = sec^2\,\alpha$

23. $\frac{sec\,\alpha}{tang\,\alpha} = sec\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = \frac{cot\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{sin\,\alpha} = cosec\,\alpha$

24. $\frac{sec\,\alpha}{cot\,\alpha} = sec\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = \frac{tang\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{cosec\,\alpha - sin\,\alpha}$

25. $\frac{sec\,\alpha}{cosec\,\alpha} = \frac{1}{cosec\,\alpha\,.\,cos\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = tang\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha}$

26. $\frac{cosec\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{sin^2\,\alpha} = cosec^2\,\alpha$

27. $\frac{cosec\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{1}{sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha} = \frac{2}{sin\,2\alpha}$

28. $\frac{cosec\,\alpha}{tang\,\alpha} = \frac{1}{sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha} = \frac{1}{sec\,\alpha - cos\,\alpha} = cosec\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$

29. $\frac{cosec\,\alpha}{cot\,\alpha} = cosec\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = \frac{1}{cot\,\alpha\,.\,sin\,\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha$

30. $\frac{cosec\,\alpha}{sec\,\alpha} = cosec\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = \frac{1}{tang\,\alpha} = cot\,\alpha$

VIII. Ausdrücke für die Funktionen eines mit dem Bogen von 60^0, 45^0 oder 30^0 verbundenen Bogens.

$$\text{Grundformen:}\ \begin{cases} F\,(60^\circ \mp \alpha) \\ F\,(45^\circ \mp \alpha) \\ F\,(30^\circ \mp \alpha) \end{cases}$$

A) Zusammensetzung eines Bogens mit dem Bogen von 60°.

Grundform: $F\,(60^\circ \mp \alpha)$

1. $\sin(60+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha\,.\,\sqrt{3} + \sin\alpha)$
2. $\sin(60-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha\,.\,\sqrt{3} - \sin\alpha)$
3. $\cos(60+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha\,.\,\sqrt{3})$
4. $\cos(60-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha\,.\,\sqrt{3})$
5. $\tang(60+\alpha) = \frac{\cot\alpha\,.\,\sqrt{3}+1}{\cot\alpha - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\tang\alpha}{1-\tang\alpha\,.\,\sqrt{3}}$
6. $\tang(60-\alpha) = \frac{\cot\alpha\,.\,\sqrt{3}-1}{\cot\alpha + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-\tang\alpha}{1+\tang\alpha\,.\,\sqrt{3}}$
7. $\cot(60+\alpha) = \frac{\cot\alpha - \sqrt{3}}{\cot\alpha\,.\,\sqrt{3}+1} = \frac{1-\tang\alpha\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\tang\alpha}$
8. $\cot(60-\alpha) = \frac{\cot\alpha + \sqrt{3}}{\cot\alpha\,.\,\sqrt{3}-1} = \frac{1+\tang\alpha\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\tang\alpha}$
9. $\sec(60+\alpha) = \frac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sec\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \sec\alpha\,.\,\sqrt{3}}$
10. $\sec(60-\alpha) = \frac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sec\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha + \sec\alpha\,.\,\sqrt{3}}$
11. $\mathrm{cosec}(60+\alpha) = \frac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sec\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sqrt{3} + \sec\alpha}$
12. $\mathrm{cosec}(60-\alpha) = \frac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sec\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha\,.\,\sqrt{3} - \sec\alpha}$

13. $\sin(60+\alpha) + \sin(60-\alpha) = \cos\alpha\,.\,\sqrt{3}$
14. $\sin(60+\alpha) - \sin(60-\alpha) = \sin\alpha$
15. $\cos(60+\alpha) + \cos(60-\alpha) = \cos\alpha$
16. $\cos(60-\alpha) - \cos(60+\alpha) = \sin\alpha\,.\,\sqrt{3}$

17. $\sin(60+\alpha) \cdot \sin(60-\alpha) = \frac{3}{4} - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{1}{4}$

18. $\sin(60+\alpha) \cdot \cos(60-\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 2\sin 2\alpha)$

19. $\sin(60-\alpha) \cdot \cos(60+\alpha) = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 2\sin 2\alpha)$

20. $\cos(60+\alpha) \cdot \cos(60-\alpha) = \frac{1}{4} - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{3}{4}$

21. $\frac{\sin(60+\alpha)}{\sin(60-\alpha)} = \frac{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} + 1}{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{\sqrt{3} - \tan\alpha}$

22. $\frac{\sin(60+\alpha)}{\cos(60-\alpha)} = \frac{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} + 1}{\cot\alpha + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \cdot \sqrt{3}}$

23. $\frac{\sin(60-\alpha)}{\cos(60+\alpha)} = \frac{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} - 1}{\cot\alpha - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \sqrt{3}}$

24. $\frac{\cos(60+\alpha)}{\cos(60-\alpha)} = \frac{1 - \tan\alpha \cdot \sqrt{3}}{1 + \tan\alpha \cdot \sqrt{3}} = \frac{\cot\alpha - \sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{3}}$

25. $\frac{\sin(60+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} + 1}{2}$

26. $\frac{\sin(60+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{2}$

27. $\frac{\sin(60-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha \cdot \sqrt{3} - 1}{2}$

28. $\frac{\sin(60-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{2}$

29. $\frac{\cos(60+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha \cdot \sqrt{3}}{2}$

30. $\frac{\cos(60+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha - \sqrt{3}}{2}$

31. $\frac{\cos(60-\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha \cdot \sqrt{3}}{2}$

32. $\frac{\cos(60-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha + \sqrt{3}}{2}$

33. $\frac{\sin(60+\alpha) \cdot \sin(60-\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{3 - \tan^2\alpha}{4}$

34. $\frac{\sin(60+\alpha) \cdot \sin(60-\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{3\cot^2\alpha - 1}{4}$

35. $\frac{\cos(60+\alpha) \cdot \cos(60-\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{1 - 3\tan^2\alpha}{4}$

36. $\frac{\cos(60+\alpha) \cdot \cos(60-\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 3}{4}$

37. $\sin \frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \cos \frac{1}{2}(60-\alpha) = \frac{\sqrt{3}+2\sin\alpha}{4}$

38. $\sin \frac{1}{2}(60-\alpha) \,.\, \cos \frac{1}{2}(60+\alpha) = \frac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{4}$

39. $\cos \frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \cos \frac{1}{2}(60-\alpha) = \frac{1+2\cos\alpha}{4}$

40. $\sin \frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \sin \frac{1}{2}(60-\alpha) = \frac{2\cos\alpha-1}{4}$

41. $\cot \frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \cot \frac{1}{2}(60-\alpha) = \frac{2\cos\alpha+1}{2\cos\alpha-1}$

42. $4\sin(60+\alpha) \,.\, \cos(60-\alpha) = 4\cos^2\alpha-1$

B) Zusammensetzung eines Bogens mit dem Bogen von 45°.

Grundform: $F\,(45^\circ \mp \alpha)$

1. $\sin(45+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha).\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sin 2\alpha}{2}\right)}$

2. $\sin(45-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha).\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1-\sin 2\alpha}{2}\right)}$

3. $\cos(45+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha).\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1-\sin 2\alpha}{2}\right)} = \sin(45-\alpha)$

4. $\cos(45-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha).\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sin 2\alpha}{2}\right)} = \sin(45+\alpha)$

5. $\tan(45+\alpha) = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}}{\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}} = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} =$

$= \frac{\cot\alpha+1}{\cot\alpha-1} = \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha + \tan 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$

6. $\tan(45-\alpha) = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}} = \sec 2\alpha - \tan 2\alpha =$

$= \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{\cot\alpha-1}{\cot\alpha+1} = \frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$

7. $\cot(45+\alpha) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \tan(45-\alpha)$

8. $\cot(45-\alpha) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(45+\alpha)$

9. $sec\,(45+\alpha) = \dfrac{2}{(cos\,\alpha - sin\,\alpha)\,.\sqrt{2}}$

10. $sec\,(45-\alpha) = \dfrac{2}{(cos\,\alpha + sin\,\alpha)\,.\sqrt{2}}$

11. $cosec\,(45+\alpha) = \dfrac{2}{(cos\,\alpha + sin\,\alpha)\,.\sqrt{2}}$

12. $cosec\,(45-\alpha) = \dfrac{2}{(cos\,\alpha - sin\,\alpha)\,.\sqrt{2}}$

13. $sin\,(45+\alpha) + sin\,(45-\alpha) = cos\,\alpha\,.\sqrt{2}$

14. $sin\,(45+\alpha) - sin\,(45-\alpha) = sin\,\alpha\,.\sqrt{2}$

15. $sin\,(45+\alpha) + cos\,(45-\alpha) = (sin\,\alpha + cos\,\alpha)\,.\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.(1 + sin\,2\alpha)$

16. $cos\,(45+\alpha) + cos\,(45-\alpha) = cos\,\alpha\,.\sqrt{2}$

17. $cos\,(45-\alpha) - cos\,(45+\alpha) = sin\,\alpha\,.\sqrt{2}$

18. $tang\,(45+\alpha) + tang\,(45-\alpha) = \dfrac{2\,sec^2\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha} = 2\,sec\,2\alpha = \dfrac{2\,cosec^2\,\alpha}{cot^2\,\alpha - 1}$

19. $tang\,(45+\alpha) - tang\,(45-\alpha) = \dfrac{4\,tang\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha} = 2\,tang\,2\alpha = \dfrac{4\,cot\,\alpha}{cot^2\,\alpha - 1}$

20. $cot\,(45+\alpha) + cot\,(45-\alpha) = tang\,(45-\alpha) + tang\,(45+\alpha)$

21. $cot\,(45+\alpha) - cot\,(45-\alpha) = tang\,(45-\alpha) - tang\,(45+\alpha)$

22. $sec\,(45+\alpha) + sec\,(45-\alpha) = \dfrac{2\,cosec^2\,\alpha\,.\,sec\,\alpha\,.\sqrt{2}}{cosec^2\,\alpha - sec^2\,\alpha} = 2\,cos\,\alpha\,.\,sec\,2\alpha\,.\sqrt{2}$

23. $sec\,(45+\alpha) - sec\,(45-\alpha) = \dfrac{2\,cosec\,\alpha\,.\,sec^2\,\alpha\,.\sqrt{2}}{cosec^2\,\alpha - sec^2\,\alpha} = 2\,sin\,\alpha\,.\,sec\,2\alpha\,.\sqrt{2}$

24. $cosec\,(45+\alpha) + cosec\,(45-\alpha) = \dfrac{2\,cosec^2\,\alpha\,.\,sec\,\alpha\,.\sqrt{2}}{cosec^2\,\alpha - sec^2\,\alpha} =$
$= 2\,cos\,\alpha\,.\,sec\,2\alpha\,.\sqrt{2} = sec\,(45+\alpha) + sec\,(45-\alpha)$

25. $cosec\,(45+\alpha) - cosec\,(45-\alpha) = \dfrac{-2\,cosec\,\alpha\,.\,sec^2\,\alpha\,.\sqrt{2}}{cosec^2\,\alpha - sec^2\,\alpha} =$
$= -2\,sin\,\alpha\,.\,sec\,2\alpha\,.\sqrt{2} = sec\,(45-\alpha) - sec\,(45+\alpha)$

26. $sin\,(45+\alpha)\,.\,sin\,(45-\alpha) = \tfrac{1}{2} - sin^2\,\alpha = cos^2\,\alpha - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,cos\,2\alpha$

27. $cos\,(45+\alpha)\,.\,cos\,(45-\alpha) = \tfrac{1}{2} - sin^2\,\alpha = cos^2\,\alpha - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\,cos\,2\alpha$

28. $\dfrac{sin\,(45+\alpha)}{sin\,(45-\alpha)} = \dfrac{1 + tang\,\alpha}{1 - tang\,\alpha} = tang\,(45+\alpha)$

29. $\dfrac{cos\,(45+\alpha)}{cos\,(45-\alpha)} = \dfrac{1 - tang\,\alpha}{1 + tang\,\alpha} = tang\,(45-\alpha)$

30. $\frac{tang\,(45+\alpha)}{tang\,(45-\alpha)} = \left(\frac{1+tang\,\alpha}{1-tang\,\alpha}\right)^2 = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$

31. $\cot\alpha\,.\,tang\,(45+\alpha) = \frac{1+\cot\alpha}{1-tang\,\alpha}$

32. $\cot\alpha\,.\,tang\,(45-\alpha) = \frac{\cot\alpha-1}{tang\,\alpha+1}$

33. $tang\,\alpha\,.\,tang\,(45+\alpha) = \frac{tang\,\alpha+1}{\cot\alpha-1}$

34. $tang\,\alpha\,.\,tang\,(45-\alpha) = \frac{1-tang\,\alpha}{1+\cot\alpha}$

35. $\sin(45+\alpha)\,.\,\sin\alpha\,.\,\sqrt{2} = \frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}{2}$

36. $\sin(45+\alpha)\,.\,\cos\alpha\,.\,\sqrt{2} = \frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}}{2}$

37. $\sin(45-\alpha)\,.\,\sin\alpha\,.\,\sqrt{2} = \frac{-1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{(1+\sin 2\alpha)}}{2}$

38. $\sin(45-\alpha)\,.\,\cos\alpha\,.\,\sqrt{2} = \frac{1-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-\sqrt{(1-\sin 2\alpha)}}{2}$

39. $\frac{\sin(45+\alpha)\,.\,\sqrt{2}}{\sin\alpha} = 1+\cot\alpha$

40. $\frac{\sin(45+\alpha)\,.\,\sqrt{2}}{\cos\alpha} = 1+tang\,\alpha$

41. $\frac{\sin(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \cot\alpha-1$

42. $\frac{\sin(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2}}{\cos\alpha} = 1-tang\,\alpha$

43. $\frac{2\sin(45+\alpha)\,.\,\sin(45-\alpha)}{\sin^2\alpha} = \cot^2\alpha-1$

44. $\frac{2\sin(45+\alpha)\,.\,\sin(45-\alpha)}{\cos^2\alpha} = 1-tang^2\,\alpha$

45. $\sin\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \frac{1+\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{2}$

46. $\sin\tfrac{1}{2}(45-\alpha)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \frac{1-\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{2}$

47. $$\cos\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \frac{1+\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}}{2}$$

48. $$\sin\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(45-\alpha)\,.\,\sqrt{2} = \frac{\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}-1}{2}$$

49. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\cot\tfrac{1}{2}(45-\alpha) = \frac{1+\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{1-\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}$$

50. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(45+\alpha) = \frac{1+\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{1+\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}}$$

51. $$\cot\tfrac{1}{2}(45-\alpha) = \frac{\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}+1}{\cos\alpha\,.\,\sqrt{3}-1}$$

52. $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(45-\alpha) = \frac{1-\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{1+\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}}$$

53. $$\cot\tfrac{1}{2}(45+\alpha) = \frac{1-\sin\alpha\,.\,\sqrt{2}}{\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}-1}$$

54. $$\cot\tfrac{1}{2}(45+\alpha)\,.\,\cot\tfrac{1}{2}(45-\alpha) = \frac{\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}+1}{\cos\alpha\,.\,\sqrt{2}-1}$$

55. $$\frac{\sin(45+\alpha)}{\sin(45-\alpha)} = \operatorname{tang}(45+\alpha) = \frac{1+\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha}$$

56. $$\sin^2(45+\alpha) = \cos^2(45-\alpha) = \frac{1+\sin 2\alpha}{2}$$

57. $$\sin^2(45-\alpha) = \cos^2(45+\alpha) = \frac{1-\sin 2\alpha}{2}$$

58. $$\operatorname{tang}^2(45+\alpha) = \cot(45-\alpha) = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$$

59. $$\operatorname{tang}^2(45-\alpha) = \cot(45+\alpha) = \frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$$

60. $$\frac{\operatorname{tang}^2(45+\alpha)-1}{\operatorname{tang}^2(45+\alpha)+1} = \operatorname{tang}\alpha$$

61. $$\frac{\operatorname{tang}^2(45+\alpha)-1}{\operatorname{tang}^2(45+\mu)+1} = \sin 2\alpha$$

62. $$\sin^2(45+\alpha) - \sin^2(45-\alpha) = \sin 2\alpha$$

63. $$\cos^2(45-\alpha) - \cos^2(45+\alpha) = \sin 2\alpha$$

64. $$\operatorname{tang}^2(45+\alpha) - \operatorname{tang}^2(45-\alpha) = 4\sec 2\alpha\,.\,\operatorname{tang} 2\alpha$$

65. $$\frac{\sin(45+\alpha)+\sin(45-\alpha)}{\sin(45+\alpha)-\sin(45-\alpha)} = \cot\alpha$$

66. $$\frac{\cos(45+\alpha)+\cos(45-\alpha)}{\cos(45-\alpha)-\cos(45+\alpha)} = \cot\alpha$$

67. $\sin(45+\frac{1}{2}\alpha) = \cos(45-\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin\alpha}{2}\right)}$

$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{2}}$

68. $\sin(45-\frac{1}{2}\alpha) = \cos(45+\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\alpha}{2}\right)}$

$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{2}}$

69. $\mathrm{tang}(45+\frac{1}{2}\alpha) = \cot(45-\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)}$

$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

$= \frac{\cot\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha-1}$

70. $\mathrm{tang}(45-\frac{1}{2}\alpha) = \cot(45+\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)}$

$= \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

$= \frac{\cot\alpha}{\mathrm{cosec}\,\alpha+1}$

C) Zusammensetzung eines Bogens mit dem Bogen von 30°.

Grundform: $F\,(30^\circ \mp \alpha)$

1. $\sin(30+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha\,.\sqrt{3})$
2. $\sin(30-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha\,.\sqrt{3})$
3. $\cos(30+\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha\,.\sqrt{3}-\sin\alpha)$
4. $\cos(30-\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha\,.\sqrt{3}+\sin\alpha)$
5. $\mathrm{tang}(30+\alpha) = \frac{\cot\alpha-\sqrt{3}}{\cot\alpha\,.\sqrt{3}-1} = \frac{1+\mathrm{tang}\,\alpha\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{tang}\,\alpha}$
6. $\mathrm{tang}(30-\alpha) = \frac{\cot\alpha-\sqrt{3}}{\cot\alpha\,.\sqrt{3}+1} = \frac{1-\mathrm{tang}\,\alpha\,.\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mathrm{tang}\,\alpha}$

7. $cot\,(30+\alpha) = \frac{cot\,\alpha\,.\sqrt{3}-1}{cot\,\alpha+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-tang\,\alpha}{1+tang\,\alpha\,.\sqrt{3}}$

8. $cot\,(30-\alpha) = \frac{cot\,\alpha\,.\sqrt{3}+1}{cot\,\alpha-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+tang\,\alpha}{1-tang\,\alpha\,.\sqrt{3}}$

9. $sec\,(30+\alpha) = \frac{2\,cosec\,\alpha\,.\,sec\,\alpha}{cosec\,\alpha\,.\sqrt{3}-sec\,\alpha}$

10. $sec\,(30-\alpha) = \frac{2\,cosec\,\alpha\,.\,sec\,\alpha}{cosec\,\alpha\,.\sqrt{3}+sec\,\alpha}$

11. $cosec\,(30+\alpha) = \frac{2\,cosec\,\alpha\,.\,sec\,\alpha}{cosec\,\alpha+sec\,\alpha\,.\sqrt{3}}$

12. $cosec\,(30-\alpha) = \frac{2\,cosec\,\alpha\,.\,sec\,\alpha}{cosec\,\alpha-sec\,\alpha\,.\sqrt{3}}$

Anmerkung. Aehnliche Formeln können für die Combinationen der Funktionen von $30\mp\alpha$ aus den für $60\mp\alpha$ gegebenen abgeleitet werden, sobald man darauf Rücksicht nimmt, daſs jedesmal:

Funktion $30+\alpha$ = Cofunction $60-\alpha$
und Funktion $30-\alpha$ = Cofunction $60+\alpha$

IX. Werthe für die Summe oder Differenz der Einheit und einer trigonometrischen Funktion, und für die Einheit und das Quadrat einer trigonometrischen Funktion.

Grundform: $1\pm F(\alpha)$ und $1\pm F^2(\alpha)$

A) Verbindung der Einheit mit einer Funktion.

a) Werthe für $1+F(\alpha)$

1. $1+sin\,\alpha = 2\,sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\,cos^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) = \left(sin\frac{\alpha}{2}+cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 =$
$= cos\,\alpha\,.\,tang\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$

2. $1+cos\,\alpha = 2\,cos^2\frac{\alpha}{2} = (1-cos\,\alpha)\,cot^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\,\alpha}{tang^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{sin\,\alpha}{tang\frac{\alpha}{2}}$
$= cot\frac{\alpha}{2}\,.\,sin\,\alpha = \frac{2}{sec^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{1+tang^2\frac{\alpha}{2}}$

3. $1 + tang\,\alpha = (1 - tang\,\alpha) . \sqrt{\left(\frac{1 + sin\,2\alpha}{1 - sin\,2\alpha}\right)} = (1 - tang\,\alpha) . tang\,(45 + \alpha) =$

$$= \frac{sin\,(45 + \alpha) . \sqrt{2}}{cos\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha + sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{3 - tang^2\frac{\alpha}{2}}{1 - tang^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{cos\,(\alpha - 45) . \sqrt{2}}{cos\,\alpha}$$

4. $1 + cot\,\alpha = tang\,(45 + \alpha) . (cot\,\alpha - 1) = \frac{cot\,\alpha - 1}{tang\,(45 - \alpha)} =$

$$= cot\,(45 - \alpha) . (cot\,\alpha - 1) = cos\,\frac{(\alpha - 45) . \sqrt{2}}{sin\,\alpha}$$

5. $1 + sec\,\alpha = 2 + tang\,\alpha . tang\frac{\alpha}{2} = 2\left(1 + \frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos\,\alpha}\right)$

6. $1 + cosec\,\alpha = 2 + cot\,\alpha . cot\frac{\alpha}{2} = 2\left(1 + \frac{cos^2\frac{\alpha}{2}}{sin\,\alpha}\right)$

b) Werthe für $1 - F(\alpha)$

1. $1 - sin\,\alpha = 2\,sin^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(\pm\,sin\frac{\alpha}{2} \mp cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{cos\,\alpha}{tang\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)} =$

$$= cos\,\alpha . tang\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. $1 - cos\,\alpha = 2\,sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\,\alpha}{cot^2\frac{\alpha}{2}} = tang^2\frac{\alpha}{2} . (1 + cos\,\alpha) = tang\frac{\alpha}{2} . sin\,\alpha =$

$$= \frac{sin\,\alpha}{cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{cosec^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,tang^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tang^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{cot^2\frac{\alpha}{2} + 1}$$

3. $1 - tang\,\alpha = (1 + tang\,\alpha) . tang\,(45 - \alpha) = (1 + tang\,\alpha) . cot\,(45 + \alpha) =$

$$= \frac{sin\,(45 - \alpha) . \sqrt{2}}{cos\,\alpha}$$

4. $1 - cot\,\alpha = -cot\,(45 + \alpha) . (1 + cot\,\alpha) = -\frac{cot\,\alpha + 1}{cot\,(45 - \alpha)} =$

$$= -\frac{sin\,(45 - \alpha) . \sqrt{2}}{sin\,\alpha}$$

5. $1 - \sec\alpha = -\tang\alpha \,.\, \tang\frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = -\frac{\sec^2\alpha \,.\, \sin^2\alpha}{\sec\alpha + 1} =$

$= -2\sin^2\frac{\alpha}{2} \,.\, \sec\alpha$

6. $1 - \operatorname{cosec}\alpha = -\cot\alpha \,.\, \cot\frac{\alpha}{2} = -\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$

c) Werthe für $1 \mp 2F(\alpha)$

1. $1 + 2\sin\alpha = 4\sin\frac{1}{2}(30+\alpha) \,.\, \cos\frac{1}{2}(30-\alpha)$
2. $1 - 2\sin\alpha = 4\cos\frac{1}{2}(30+\alpha) \,.\, \sin\frac{1}{2}(30-\alpha)$
3. $1 + 2\cos\alpha = 4\cos\frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \cos\frac{1}{2}(60-\alpha) = \frac{\sin\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$
4. $1 - 2\cos\alpha = -4\sin\frac{1}{2}(60+\alpha) \,.\, \sin\frac{1}{2}(60-\alpha) = -\frac{\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

B) Werthe für $1 \pm F^2(\alpha)$

a) Werthe für $1 + F^2(\alpha)$

1. $1 + \sin^2\alpha = 2 - \cos^2\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha + 1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = \frac{3 - \cos 2\alpha}{2}$
2. $1 + \cos^2\alpha = 2 - \sin^2\alpha = \frac{\sec^2\alpha + 1}{\sec^2\alpha} = \frac{3 + \cos 2\alpha}{2}$
3. $1 + \tang^2\alpha = \frac{\tang^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\tang\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \,.\, \tang^2\alpha$
4. $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{\cot^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \,.\, \cot^2\alpha = \frac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$
5. $1 + \sec^2\alpha = \frac{2 - \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 2 + \tang^2\alpha = \frac{1 + 3\sec 2\alpha}{1 + \sec 2\alpha} = \frac{3 + \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
6. $1 + \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{2 - \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = 2 + \cot^2\alpha = \frac{3 - \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{3\sec 2\alpha - 1}{\sec 2\alpha - 1}$

b) Werthe für $1 - F^2(\alpha)$

1. $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
2. $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

3. $1 - tang^2\alpha = \frac{2\,tang\,\alpha}{tang\,2\alpha} = 2\cot 2\alpha\,.\,tang\,\alpha = \frac{2\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2}{\sec 2\alpha + 1} =$
$= \cos 2\alpha\,.\,\sec^2\alpha$

4. $1 - \cot^2\alpha = -\cot 2\alpha\,.\,2\cot\alpha = -\frac{2\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = -\frac{2}{\sec 2\alpha - 1} =$
$= -\cos 2\alpha\,.\,cosec^2\alpha$

5. $1 - \sec^2\alpha = -\sin^2\alpha\,.\,\sec^2\alpha = -tang^2\alpha = -\frac{1}{\cot^2\alpha}$

6. $1 - cosec^2\alpha = -\cos^2\alpha\,.\,cosec^2\alpha = -\frac{1}{tang^2\alpha} = -\cot^2\alpha$

C) Werthe für $\frac{1 \mp F(\alpha)}{1 \pm F(\alpha)}$

1. $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = tang^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = \cot^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}^2 =$
$= \left\{\frac{1+tang\frac{\alpha}{2}}{1-tang\frac{\alpha}{2}}\right\}^2$

2. $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = tang^2\left(45-\frac{\alpha}{2}\right) = \cot^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = \left\{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}\right\}^2 =$
$= \left\{\frac{1-tang\frac{\alpha}{2}}{1+tang\frac{\alpha}{2}}\right\}^2$

3. $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot^2\frac{\alpha}{2}$

4. $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = tang^2\frac{\alpha}{2}$

5. $\frac{1+tang\,\alpha}{1-tang\,\alpha} = tang\,(45+\alpha) = \cot\,(45-\alpha) = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

6. $\frac{1-tang\,\alpha}{1+tang\,\alpha} = tang\,(45-\alpha) = \cot\,(45+\alpha) = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

7. $\frac{cot\,\alpha + 1}{cot\,\alpha - 1} = tang\,(45 + \alpha) = cot\,(45 - \alpha)$

8. $\frac{cot\,\alpha - 1}{cot\,\alpha + 1} = tang\,(45 - \alpha) = cot\,(45 + \alpha)$

9. $\frac{sec\,\alpha + 1}{sec\,\alpha - 1} = cot^2\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\,\alpha}{1 - cos\,\alpha}$

10. $\frac{sec\,\alpha - 1}{sec\,\alpha + 1} = tang^2\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}$

11. $\frac{cosec\,\alpha + 1}{cosec\,\alpha - 1} = \frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha} = tang^2\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = cot^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)$

12. $\frac{cosec\,\alpha - 1}{cosec\,\alpha + 1} = \frac{1 - sin\,\alpha}{1 + sin\,\alpha} = tang^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = cot^2\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)$

D) Werthe für $1 \mp F(2\alpha)$

1. $1 + sin\,2\alpha = (sin\,\alpha + cos\,\alpha)^2 = 2\,sin^2\,(45 + \alpha)^2 = \frac{1 + tang^2\,\alpha + 2\,tang\,\alpha}{1 + tang^2\,\alpha}$

2. $1 - sin\,2\alpha = (sin\,\alpha - cos\,\alpha)^2 = 2\,sin^2\,(45 - \alpha)^2 = \frac{1 + tang^2\,\alpha - 2\,tang\,\alpha}{1 + tang^2\,\alpha}$

3. $1 + cos\,2\alpha = 2\,cos^2\,\alpha = \frac{2}{1 + tang^2\,\alpha}$

4. $1 - cos\,2\alpha = 2\,sin^2\,\alpha = \frac{2\,tang^2\,\alpha}{1 + tang^2\,\alpha}$

5. $1 + tang\,2\alpha = \frac{1 - tang^2\,\alpha + 2\,tang\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha}$

6. $1 - tang\,2\alpha = \frac{1 - tang^2\,\alpha - 2\,tang\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha}$

7. $1 + cot\,2\alpha = 1 + \frac{1}{2}(cot\,\alpha - tang\,\alpha)$

8. $1 - cot\,2\alpha = 1 - \frac{1}{2}(cot\,\alpha - tang\,\alpha)$

9. $1 + sec\,2\alpha = \frac{2}{1 - tang^2\,\alpha} = \frac{2\,cos^2\,\alpha}{2\,cos^2\,\alpha - 1}$

10. $sec\,2\alpha - 1 = \frac{2\,tang^2\,\alpha}{1 - tang^2\,\alpha} = \frac{2}{cot^2\,\alpha - 1} = \frac{2\,sin^2\,\alpha}{1 - 2\,sin^2\,\alpha}$

11. $1 + cosec\,2\alpha = 1 + \frac{1}{2}(tang\,\alpha + cot\,\alpha)$

12. $cosec\,2\alpha - 1 = \frac{1}{2}(tang\,\alpha + cot\,\alpha) - 1 = \frac{tang\,(45 - \alpha)\,.\,(1 - tang^2\,\alpha)}{2\,tang\,\alpha}$

E) Werthe für $\frac{F(2\alpha)}{1 \mp F'(2\alpha)}$ und $\frac{1 \mp F(2\alpha)}{1 \mp F'(2\alpha)}$

1. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tang \alpha$

2. $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot \alpha$

3. $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \tang^2 \alpha}{2}$

4. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2}$

5. $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tang (45 - \alpha) = \cot (45 + \alpha) = \sec 2\alpha - \tang 2\alpha$

6. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \tang (45 + \alpha) = \cot (45 - \alpha) = \sec 2\alpha + \tang 2\alpha$

7. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \frac{\tang (45 + \alpha)}{\tang (45 - \alpha)}$

8. $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tang^2 (45 - \alpha)$

9. $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot^2 \alpha$

10. $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tang^2 \alpha$

X. Tafeln für die Funktionen eines vielfachen Bogens.

A) Ausdrücke für den *Sinus*.

a) Allgemeine Ausdrücke für den *Sinus* eines vielfachen Bogens.

aa) Durch Funktionen des einfachen Bogens.

aaa) Durch den *Sinus*.

1. $$\sin n\alpha = n \cdot \sin \alpha - \frac{n \cdot (n^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \sin^3 \alpha + \frac{n \cdot (n^2 - 1^2) \cdot (n^2 - 3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \sin^5 \alpha - \\ - \frac{n \cdot (n^2 - 1^2) \cdot (n^2 - 3^2) \cdot (n^2 - 5^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \sin^7 \alpha + \ldots$$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale **ungerade** Zahl ist; sie hat $\frac{n+1}{2}$ Glieder.

2. $\sin n\alpha = \sqrt{(1-\sin^2\alpha)} \, . \left(n \, . \sin\alpha - \frac{n.(n^2-2^2)}{1.2.3} . \sin^3\alpha + \frac{n.(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5} . \right.$

$\left. . \sin^5\alpha - \frac{n.(n^2-2^2).(n^2-4^2).(n^2-6^2)}{1.2.3.4.5.6.7} . \sin^7\alpha - \ldots . \right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale gerade Zahl ist; sie hat $\frac{n}{2}$ Glieder.

bbb) Durch den *Cosinus.*

1. $\sin n\alpha = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)} \, . \left(1 - \frac{n^2-1^2}{1.2} . \cos^2\alpha + \frac{(n^2-1^2).(n^2-3^2)}{1.2.3.4} . \cos^4\alpha - \right.$

$\left. - \frac{(n^2-1^2).(n^2-3^2).(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6} . \cos^6\alpha + \ldots . \right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale ungerade Zahl ist. Das positive Zeichen gilt, wenn $n = 4m + 1$, und das negative, wenn $n = 4m - 1$; wo m jede beliebige Zahl bedeutet.

2. $\sin n\alpha = \pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)} \, . \left(n \, . \cos\alpha - \frac{n.(n^2-2^2)}{1.2.3} . \cos^3\alpha + \right.$

$\left. + \frac{n.(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5} . \cos^5\alpha - \ldots . \right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale gerade Zahl ist. Das positive Zeichen gilt, wenn $n = 4m + 2$; das negative, wenn $n = 4m - 2$.

ccc) Durch die *Tangente.*

$\sin n\alpha = \cos^n\alpha \, . \left(\frac{n}{1} . \tang\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} . \tang^3\alpha + \right.$

$\left. + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5} . \tang^5\alpha - \ldots . \right)$

wo das letzte Glied den Koeffizienten

$$\frac{n.(n-1)\ldots.(n-(n-1))}{1.2.3\ldots.(n-1)}$$

hat, und zwar:

mit dem Zeichen	und der Potenz	sobald
$-$	$\tang^{n-1}\alpha$	$n = 4m$ ist
$+$	$\tang^{n-1}\alpha$	$n = 4m + 2$
$+$	$\tang^{n}\alpha$	$n = 4m + 1$
$-$	$\tang^{n}\alpha$	$n = 4m - 1$

ddd) Durch die *Cotangente.*

$$\sin n\alpha = \sin^n \alpha \,.\left(\frac{n}{1}\,.\cot^{n-1}\alpha - \frac{n\,.(n-1)\,.(n-2)}{1\,.2\,.3}\,.\cot^{n-3}\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{n\,.(n-1)\,.(n-2)\,.(n-3)\,.(n-4)}{1\,.2\,.3\,.4\,.5}\,.\cot^{n-5}\alpha - \ldots\right)$$

wo das letzte Glied die Gestalt

$$\pm \frac{n\,.(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\,.2\,.3\ldots(n-1)}\,.\cot^{n-(n-1)}\alpha$$

hat, wenn $n = 4m$ oder $= 4m + 2$

hingegen die Gestalt $\mp \frac{n\,.(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\,.2\,.3\ldots n}$

sobald $n = 4m + 1$ oder $4m - 1$

bb) Durch Funktionen des mehrfachen Bogens.

1. $\sin n\alpha = 2\cos\alpha\,.\sin(n-1)\alpha - \sin(n-2)\alpha$
2. $\sin n\alpha = 2\sin\alpha\,.\cos(n-1)\alpha + \sin(n-2)\alpha$
3. $\sin n\alpha = \sin\alpha\,.\cos(n-1)\alpha + \cos\alpha\,.\sin(n-1)\alpha$

cc) Durch Faktoren, welche die Funktionen anderer Bogen enthalten.

$$\sin n\alpha = 2^{n-1}\sin\alpha\,.\sin\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right).$$
$$.\sin\left(\frac{3\pi}{n}-\alpha\right).\sin\left(\frac{3\pi}{n}+\alpha\right)\ldots$$

diese Reihe wird so weit fortgesetzt, bis man n Faktoren hat.

π drückt hier (wie überall in den trigonometrischen Formeln, für den Radius $= 1$) den halben Kreis oder 180° aus.

b) Ausdrücke für bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen.

aa) Durch den *Sinus* des einfachen Bogens.

1. $\sin\alpha = \sin\alpha$
2. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,.\sqrt{(1-\sin^2\alpha)} = 2\sin\alpha - \sin^3\alpha - \frac{1}{4}\sin^5\alpha - \frac{1}{8}\sin^7\alpha -$
   $- \frac{5}{64}\sin^9\alpha - \frac{7}{128}\sin^{11}\alpha - \frac{21}{512}\sin^{13}\alpha - \frac{231}{7168}\sin^{15}\alpha - \ldots$
3. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
4. $\sin 4\alpha = (4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)\,.\sqrt{(1-\sin^2\alpha)} = 4\sin\alpha - 10\sin^3\alpha + \frac{7}{2}\sin^5\alpha +$
   $+ \frac{3}{4}\sin^7\alpha + \frac{11}{32}\sin^9\alpha + \frac{13}{32}\sin^{11}\alpha + \ldots$

5. $\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha$

6. $\sin 6\alpha = (6 \sin \alpha - 32 \sin^3 \alpha + 32 \sin^5 \alpha) . \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} = 6 \sin \alpha -$
$- 35 \sin^3 \alpha + \frac{189}{4} \sin^5 \alpha - \frac{99}{8} \sin^7 \alpha - \frac{143}{64} \sin^9 \alpha$

7. $\sin 7\alpha = 7 \sin \alpha - 56 \sin^3 \alpha + 112 \sin^5 \alpha - 64 \sin^7 \alpha$

8. $\sin 8\alpha = (8 \sin \alpha - 80 \sin^3 \alpha + 192 \sin^5 \alpha - 128 \sin^7 \alpha) . \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} =$
$= 8 \sin \alpha - 84 \sin^3 \alpha + 231 \sin^5 \alpha - \frac{429}{2} \sin^7 \alpha$

9. $\sin 9\alpha = 9 \sin \alpha - 120 \sin^3 \alpha + 432 \sin^5 \alpha - 576 \sin^7 \alpha + 256 \sin^9 \alpha$

10. $\sin 10\alpha = (10 \sin \alpha - 160 \sin^3 \alpha + 672 \sin^5 \alpha - 7168 \sin^7 \alpha + 3584 \sin^9 \alpha) .$
$. \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)} = 10 \sin \alpha - 165 \sin^3 \alpha + \frac{3003}{4} \sin^5 \alpha - \frac{10725}{8} \sin^7 \alpha$

bb) Durch den *Cosinus* des einfachen Bogens.

1. $\sin \alpha = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

2. $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

3. $\sin 3\alpha = (4 \cos^2 \alpha - 1) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

4. $\sin 4\alpha = (8 \cos^3 \alpha - 4 \cos^2 \alpha) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

5. $\sin 5\alpha = (16 \cos^4 \alpha - 12 \cos^2 \alpha + 1) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

6. $\sin 6\alpha = (32 \cos^5 \alpha - 32 \cos^3 \alpha + 6 \cos \alpha) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

7. $\sin 7\alpha = (64 \cos^6 \alpha - 80 \cos^4 \alpha + 24 \cos^2 \alpha - 1) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

8. $\sin 8\alpha = (128 \cos^7 \alpha - 192 \cos^5 \alpha + 80 \cos^3 \alpha - 8 \cos \alpha) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

9. $\sin 9\alpha = (256 \cos^8 \alpha - 448 \cos^6 \alpha + 240 \cos^4 \alpha - 40 \cos^2 \alpha) . \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

10. $\sin 10\alpha = (512 \cos^9 \alpha - 1024 \cos^7 \alpha + 672 \cos^5 \alpha - 160 \cos^3 \alpha + 10 \cos \alpha) .$
$. \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)}$

cc) Durch *Sinus* und *Cosinus* des mehrfachen Bogens.

aaa)

1. $\sin \alpha = \sin \alpha$

2. $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha . \sin \alpha$

3. $\sin 3\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 2\alpha - \sin \alpha$

4. $\sin 4\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 3\alpha - \sin 2\alpha$

5. $\sin 5\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 4\alpha - \sin 3\alpha$

6. $\sin 6\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 5\alpha - \sin 4\alpha$

7. $\sin 7\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 6\alpha - \sin 5\alpha$

8. $\sin 8\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 7\alpha - \sin 6\alpha$

9. $\sin 9\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 8\alpha - \sin 7\alpha$

10. $\sin 10\alpha = 2 \cos \alpha . \sin 9\alpha - \sin 8\alpha$

bbb)

1. $\sin \alpha = \sin \alpha$
2. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$
3. $\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 2\alpha + \sin \alpha$
4. $\sin 4\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$
5. $\sin 5\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 4\alpha + \sin 3\alpha$
6. $\sin 6\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 5\alpha + \sin 4\alpha$
7. $\sin 7\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 6\alpha + \sin 5\alpha$
8. $\sin 8\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 7\alpha + \sin 6\alpha$
9. $\sin 9\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 8\alpha + \sin 7\alpha$
10. $\sin 10\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos 9\alpha + \sin 8\alpha$

ccc)

1. $\sin \alpha = \sin \alpha$
2. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$
3. $\sin 3\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 2\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 2\alpha$
4. $\sin 4\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 3\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 3\alpha$
5. $\sin 5\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 4\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 4\alpha$
6. $\sin 6\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 5\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 5\alpha$
7. $\sin 7\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 6\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 6\alpha$
8. $\sin 8\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 7\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 7\alpha$
9. $\sin 9\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 8\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 8\alpha$
10. $\sin 10\alpha = \sin \alpha \,.\, \cos 9\alpha + \cos \alpha \,.\, \sin 9\alpha$

dd) Durch Faktoren von Funktionen verschiedener Bogen.

1. $\sin \alpha = 1 \sin \alpha = \sin \alpha$
2. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
3. $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$
4. $\sin 4\alpha = 8 \sin \alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
5. $\sin 5\alpha = 16 \sin \alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$

6. $\sin 6\alpha = 32 \sin\alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

7. $\sin 7\alpha = 64 \sin\alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{7}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{7}-\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{3\pi}{7}-\alpha\right).\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\alpha\right)$

8. $\sin 8\alpha = 128 \sin\alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\alpha\right).\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

9. $\sin 9\alpha = 256 \sin\alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{9}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{9}+\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{9}-\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right).\sin\left(\frac{4\pi}{9}-\alpha\right).\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\alpha\right)$

10. $\sin 10\alpha = 512 \sin\alpha \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right).\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right).$
$.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

B) Ausdrücke für den *Cosinus*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die *Cosinus* der vielfachen Bogen.

aa) Durch Funktionen des einfachen Bogens.

aaa) Durch den *Sinus*.

1. $\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{1.2}.\sin^2\alpha + \frac{n^2.(n^2-2^2)}{1.2.3.4}.\sin^4\alpha - \frac{n^2.(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}.$
$.\sin^6\alpha + \frac{n^2.(n^2-2^2).(n^2-4^2).(n^2-6^2)}{1.2.3.4.5.6.7.8}.\sin^8\alpha - \ldots$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale g e r a d e Zahl ist; sie hat $\frac{n+2}{2}$ Glieder.

2. $\cos n\alpha = \sqrt{(1-\sin^2\alpha)} . \left(1 - \frac{n^2-1}{1.2} . \sin^2\alpha + \frac{(n^2-1).(n^2-3^2)}{1.2.3.4} . \sin^4\alpha - \right.$
$\left. - \frac{(n^2-1).(n^2-3^2).(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6} . \sin^6\alpha + \ldots\right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale ungerade Zahl ist; sie hat $\frac{n+1}{2}$ Glieder.

bbb) Durch den *Cosinus*.

1. $\cos n\alpha = \pm\left(n.\cos\alpha - \frac{n.(n^2-1)}{1.2.3} . \cos^3\alpha + \frac{n.(n^2-1).(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} . \cos^5\alpha - \ldots\right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale ungerade Zahl ist. Das positive Zeichen gilt, wenn $n = 4m+1$, und das negative, wenn $n = 4m-1$.

2. $\cos n\alpha = \pm\left(1 - \frac{n^2}{1.2} . \cos^2\alpha + \frac{n^2.(n^2-2^2)}{1.2.3.4} . \cos^4\alpha - \frac{n^2.(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} . \right.$
$\left. . \cos^6\alpha + \ldots\right)$

diese Reihe gilt, wenn n eine ganze rationale gerade Zahl ist. Das positive Zeichen wird genommen, wenn $n = 4m$, und das negative, wenn $n = 4m-2$.

ccc) Durch die *Tangente*.

$\cos n\alpha = \cos^n\alpha . \left(1 - \frac{n.(n-1)}{1.2} . \tan g^2\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} . \right.$
$\left. . \tan g^4\alpha - \ldots\right)$

wo das letzte Glied die Gestalt hat:

$\mp\frac{n.(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1.2.3\ldots n} . \tan g^n\alpha$ wenn $n = 4m$ oder $= 4m+2$

hingegen:

$\mp\frac{n.(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1.2.3\ldots(n-1)} . \tan g^{n-1}\alpha$ wenn $n = 4m+1$ oder $= 4m-1$

ddd) Durch die *Cotangente*.

$\cos n\alpha = \sin^n\alpha . \left(\cot^n\alpha - \frac{n.(n-1)}{1.2} . \cot^{n-2}\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} . \right.$
$\left. . \cot^{n-4}\alpha - \ldots\right)$

wo das letzte Glied die Gestalt hat:

$$\mp \frac{n.(n-1)\ldots.(n-(n-1))}{1.2\ldots.n} \text{ wenn } n = 4m \text{ oder } = 4m+2$$

hingegen:

$$\mp \frac{n.(n-1)\ldots.(n-(n-1))}{1.2\ldots.(n-1)}.\,cot^{n-(n-1)}\alpha \text{ wenn } n = 4m+1 \text{ oder } = 4m-1$$

bb) Durch Funktionen des mehrfachen Bogens.

1. $cos\, n\alpha = 2\,cos\,\alpha\,.\,cos\,(n-1)\,\alpha - cos\,(n-2)\,\alpha$
2. $cos\, n\alpha = -2\,sin\,\alpha\,.\,sin\,(n-1)\,\alpha + cos\,(n-2)\,\alpha$
3. $cos\, n\alpha = cos\,\alpha\,.\,cos\,(n-1)\,\alpha - sin\,\alpha\,.\,sin\,(n-1)\,\alpha$

cc) Durch Faktoren, welche die Funktionen anderer Bogen enthalten.

1. $$cos\, n\alpha = 2^{n-1}\,sin\left(\frac{\pi}{2n}-\alpha\right).\,sin\left(\frac{\pi}{2n}+\alpha\right).\,sin\left(\frac{3\pi}{2n}-\alpha\right).\,sin\left(\frac{3\pi}{2n}+\alpha\right).$$
$$.\,sin\left(\frac{5\pi}{2n}-\alpha\right).\,sin\left(\frac{5\pi}{2n}+\alpha\right)\ldots.$$

und so weit, bis man n Faktoren hat, oder:

2. $$cos\, n\alpha = 2^{n-1}\,cos\left[\left(\frac{n-1}{2n}\right)\pi+\alpha\right].\,cos\left[\left(\frac{n-1}{2n}\right)\pi-\alpha\right].\,cos\left[\left(\frac{n-3}{2n}\right)\pi+\alpha\right].$$
$$.\,cos\left[\left(\frac{n-3}{2n}\right)\pi-\alpha\right].\,cos\left[\left(\frac{n-5}{2n}\right)\pi+\alpha\right].\,cos\left[\left(\frac{n-5}{2n}\right)\pi-\alpha\right]\ldots.$$

und so weit, bis man n Faktoren hat.

b) Ausdrücke für bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen.

aa) Durch den *Sinus* des einfachen Bogens.

1. $cos\,\alpha = \sqrt{(1-sin^2\alpha)} = cos\,\alpha$
2. $cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha$
3. $cos\,3\alpha = (1-4\,sin^2\alpha).\sqrt{(1-sin^2\alpha)} = 1 - \frac{9}{2}\,sin^2\alpha + \frac{15}{8}\,sin^4\alpha + \frac{7}{16}\,sin^6\alpha + $
   $+ \frac{27}{128}\,sin^8\alpha + \ldots.$
4. $cos\,4\alpha = 1 - 8\,sin^2\alpha + 8\,sin^4\alpha$
5. $cos\,5\alpha = (1-12\,sin^2\alpha+16\,sin^4\alpha).\sqrt{(1-sin^2\alpha)} = 1 - \frac{25}{2}\,sin^2\alpha +$
   $+ \frac{175}{8}\,sin^4\alpha - \frac{105}{16}\,sin^6\alpha - \frac{165}{128}\,sin^8\alpha$
6. $cos\,6\alpha = 1 - 18\,sin^2\alpha + 48\,sin^4\alpha - 32\,sin^6\alpha$
7. $cos\,7\alpha = (1-24\,sin^2\alpha+80\,sin^4\alpha-64\,sin^6\alpha).\sqrt{(1-sin^2\alpha)}$

8. $\cos 8\alpha = 1 - 32 \sin^2 \alpha + 160 \sin^4 \alpha - 256 \sin^6 \alpha + 128 \sin^8 \alpha$

9. $\cos 9\alpha = (1 - 40 \sin^2 \alpha + 240 \sin^4 \alpha - 448 \sin^6 \alpha + 256 \sin^8 \alpha) . \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)}$

10. $\cos 10\alpha = 1 - 50 \sin^2 \alpha + 400 \sin^4 \alpha - 1120 \sin^6 \alpha + 1280 \sin^8 \alpha - 512 \sin^{10} \alpha$

bb) Durch den *Cosinus* des einfachen Bogens.

1. $\cos \alpha = \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
3. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
4. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$
5. $\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$
6. $\cos 6\alpha = 32 \cos^6 \alpha - 48 \cos^4 \alpha + 18 \cos^2 \alpha - 1$
7. $\cos 7\alpha = 64 \cos^7 \alpha - 112 \cos^5 \alpha + 56 \cos^3 \alpha - 7 \cos \alpha$
8. $\cos 8\alpha = 128 \cos^8 \alpha - 256 \cos^6 \alpha + 160 \cos^4 \alpha - 32 \cos^2 \alpha + 1$
9. $\cos 9\alpha = 256 \cos^9 \alpha - 576 \cos^7 \alpha + 432 \cos^5 \alpha - 120 \cos^3 \alpha + 9 \cos \alpha$
10. $\cos 10\alpha = 512 \cos^{10} \alpha - 1280 \cos^8 \alpha + 1120 \cos^6 \alpha - 400 \cos^4 \alpha + 50 \cos^2 \alpha - 1$

cc) Durch den *Cosinus* des mehrfachen Bogens.

1. $\cos \alpha = \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = 2 \cos \alpha . \cos \alpha - 1$
3. $\cos 3\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 2\alpha - \cos \alpha$
4. $\cos 4\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 3\alpha - \cos 2\alpha$
5. $\cos 5\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 4\alpha - \cos 3\alpha$
6. $\cos 6\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 5\alpha - \cos 4\alpha$
7. $\cos 7\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 6\alpha - \cos 5\alpha$
8. $\cos 8\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 7\alpha - \cos 6\alpha$
9. $\cos 9\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 8\alpha - \cos 7\alpha$
10. $\cos 10\alpha = 2 \cos \alpha . \cos 9\alpha - \cos 8\alpha$

dd) Durch *Sinus* und *Cosinus* des mehrfachen Bogens.

aaa)

1. $\cos \alpha = \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
3. $\cos 3\alpha = \cos \alpha . \cos 2\alpha - \sin \alpha . \sin 2\alpha$
4. $\cos 4\alpha = \cos \alpha . \cos 3\alpha - \sin \alpha . \sin 3\alpha$
5. $\cos 5\alpha = \cos \alpha . \cos 4\alpha - \sin \alpha . \sin 4\alpha$

6. $\cos 6\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos 5\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin 5\alpha$
7. $\cos 7\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos 6\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin 6\alpha$
8. $\cos 8\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos 7\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin 7\alpha$
9. $\cos 9\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos 8\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin 8\alpha$
10. $\cos 10\alpha = \cos\alpha \,.\, \cos 9\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin 9\alpha$

bbb)

1. $\cos\alpha = \cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha \,.\, \sin\alpha$
3. $\cos 3\alpha = \cos\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 2\alpha$
4. $\cos 4\alpha = \cos 2\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 3\alpha$
5. $\cos 5\alpha = \cos 3\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 4\alpha$
6. $\cos 6\alpha = \cos 4\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 5\alpha$
7. $\cos 7\alpha = \cos 5\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 6\alpha$
8. $\cos 8\alpha = \cos 6\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 7\alpha$
9. $\cos 9\alpha = \cos 7\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 8\alpha$
10. $\cos 10\alpha = \cos 8\alpha - 2\sin\alpha \,.\, \sin 9\alpha$

cc) Durch Faktoren von Funktionen verschiedener Bogen.

aaa)

1. $\cos\alpha = 1\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

2. $\cos 2\alpha = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

3. $\cos 3\alpha = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

4. $\cos 4\alpha = 8\sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right)$

5. $\cos 5\alpha = 16\sin\left(\frac{\pi}{10} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{10} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

6. $\cos 6\alpha = 32\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right)$

7. $\cos 7\alpha = 64 \sin\left(\frac{\pi}{14} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{14} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{14} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{5\pi}{14} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{6\pi}{14} - \alpha\right)$

8. $\cos 8\alpha = 128 \sin\left(\frac{\pi}{16} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{16} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{16} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{16} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{5\pi}{16} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{5\pi}{16} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{16} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{16} + \alpha\right)$

9. $\cos 9\alpha = 256 \sin\left(\frac{\pi}{18} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{18} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{5\pi}{18} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{5\pi}{18} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{18} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{18} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

10. $\cos 10\alpha = 512 \sin\left(\frac{\pi}{20} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{20} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{20} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{3\pi}{20} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{20} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{7\pi}{20} + \alpha\right) .$
$. \sin\left(\frac{9\pi}{20} - \alpha\right) . \sin\left(\frac{9\pi}{20} + \alpha\right)$

bbb)

1. $\cos \alpha = 1 \cos \alpha$

2. $\cos 2\alpha = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

3. $\cos 3\alpha = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{6} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{2\pi}{6} - \alpha\right) . \cos \alpha$

4. $\cos 4\alpha = 8 \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right) . \cos\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$

5. $\cos 5\alpha = 16 \cos\left(\frac{4\pi}{10} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{4\pi}{10} - \alpha\right) . \cos\left(\frac{2\pi}{10} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{2\pi}{10} - \alpha\right) . \cos \alpha$

6. $\cos 6\alpha = 32 \cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) . \cos\left(\frac{3\pi}{12} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \alpha\right) .$
$. \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) . \cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)$

7. $\cos 7\alpha = 64 \cos\left(\frac{6\pi}{14}+\alpha\right).\cos\left(\frac{6\pi}{14}-\alpha\right).\cos\left(\frac{4\pi}{14}+\alpha\right).\cos\left(\frac{4\pi}{14}-\alpha\right).$
$.\cos\left(\frac{2\pi}{14}+\alpha\right).\cos\left(\frac{2\pi}{14}-\alpha\right).\cos\alpha$

8. $\cos 8\alpha = 128 \cos\left(\frac{7\pi}{16}+\alpha\right).\cos\left(\frac{7\pi}{16}-\alpha\right).\cos\left(\frac{5\pi}{16}+\alpha\right).\cos\left(\frac{5\pi}{16}-\alpha\right).$
$.\cos\left(\frac{3\pi}{16}+\alpha\right).\cos\left(\frac{3\pi}{16}-\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{16}+\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{16}-\alpha\right)$

9. $\cos 9\alpha = 256 \cos\left(\frac{8\pi}{18}+\alpha\right).\cos\left(\frac{8\pi}{18}-\alpha\right).\cos\left(\frac{6\pi}{18}+\alpha\right).\cos\left(\frac{6\pi}{18}-\alpha\right).$
$.\cos\left(\frac{4\pi}{18}+\alpha\right).\cos\left(\frac{4\pi}{18}-\alpha\right).\cos\left(\frac{2\pi}{18}+\alpha\right).\cos\left(\frac{2\pi}{18}-\alpha\right).\cos\alpha$

10. $\cos 10\alpha = 512 \cos\left(\frac{9\pi}{20}+\alpha\right).\cos\left(\frac{9\pi}{20}-\alpha\right).\cos\left(\frac{7\pi}{20}+\alpha\right).\cos\left(\frac{7\pi}{20}-\alpha\right).$
$.\cos\left(\frac{5\pi}{20}+\alpha\right).\cos\left(\frac{5\pi}{20}-\alpha\right).\cos\left(\frac{3\pi}{20}+\alpha\right).\cos\left(\frac{3\pi}{20}-\alpha\right).$
$.\cos\left(\frac{\pi}{20}+\alpha\right).\cos\left(\frac{\pi}{20}-\alpha\right)$

C) Ausdrücke für die *Tangente*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die *Tangente* eines vielfachen Bogens.

1. $\operatorname{tang} n\alpha =$

$$\frac{n.\operatorname{tang}\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\operatorname{tang}^3\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}.\operatorname{tang}^5\alpha - \ldots}{1 - \frac{n.(n-1)}{1.2}.\operatorname{tang}^2\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\operatorname{tang}^4\alpha - \frac{n.(n-1)\ldots(n-5)}{1\ldots 6}.\operatorname{tang}^6\alpha + \ldots}$$

oder auch:

2. $\operatorname{tang} n\alpha =$

$$\frac{n.\cot^{n-1}\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\cot^{n-3}\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}.\cot^{n-5}\alpha - \ldots}{\cot^n\alpha - \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cot^{n-2}\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\cot^{n-4}\alpha - \ldots}$$

b) Bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen.

aa) Ausgedrückt durch die *Tangenten* des einfachen Bogens.

1. $\tan g\, \alpha = \tan g\, \alpha$

2. $\tan g\, 2\alpha = \dfrac{2 \tan g\, \alpha}{1 - \tan g^2 \alpha}$

3. $\tan g\, 3\alpha = \dfrac{3 \tan g\, \alpha - \tan g^3 \alpha}{1 - 3 \tan g^2 \alpha}$

4. $\tan g\, 4\alpha = \dfrac{4 \tan g\, \alpha - 4 \tan g^3 \alpha}{1 - 6 \tan g^2 \alpha + \tan g^4 \alpha}$

5. $\tan g\, 5\alpha = \dfrac{5 \tan g\, \alpha - 10 \tan g^3 \alpha + \tan g^5 \alpha}{1 - 10 \tan g^2 \alpha + 5 \tan g^4 \alpha}$

6. $\tan g\, 6\alpha = \dfrac{6 \tan g\, \alpha - 20 \tan g^3 \alpha + 6 \tan g^5 \alpha}{1 - 15 \tan g^2 \alpha + 15 \tan g^4 \alpha - \tan g^6 \alpha}$

7. $\tan g\, 7\alpha = \dfrac{7 \tan g\, \alpha - 35 \tan g^3 \alpha + 21 \tan g^5 \alpha - \tan g^7 \alpha}{1 - 21 \tan g^2 \alpha + 35 \tan g^4 \alpha - 7 \tan g^6 \alpha}$

8. $\tan g\, 8\alpha = \dfrac{8 \tan g\, \alpha - 56 \tan g^3 \alpha + 56 \tan g^5 \alpha - 8 \tan g^7 \alpha}{1 - 28 \tan g^2 \alpha + 70 \tan g^4 \alpha - 28 \tan g^6 \alpha + \tan g^8 \alpha}$

9. $\tan g\, 9\alpha = \dfrac{9 \tan g\, \alpha - 84 \tan g^3 \alpha + 126 \tan g^5 \alpha - 36 \tan g^7 \alpha + \tan g^9 \alpha}{1 - 36 \tan g^2 \alpha + 126 \tan g^4 \alpha - 84 \tan g^6 \alpha + 9 \tan g^8 \alpha}$

10. $\tan g\, 10\alpha = \dfrac{10 \tan g\, \alpha - 120 \tan g^3 \alpha + 252 \tan g^5 \alpha - 120 \tan g^7 \alpha + 10 \tan g^9 \alpha}{1 - 45 \tan g^2 \alpha + 210 \tan g^4 \alpha - 210 \tan g^6 \alpha + 45 \tan g^8 \alpha - \tan g^{10} \alpha}$

bb) Ausgedrückt durch die *Cotangenten* des einfachen Bogens.

1. $\tan g\, \alpha = \dfrac{1}{\cot \alpha}$

2. $\tan g\, 2\alpha = \dfrac{2 \cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$

3. $\tan g\, 3\alpha = \dfrac{3 \cot^2 \alpha - 1}{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}$

4. $\tan g\, 4\alpha = \dfrac{4 \cot^3 \alpha - 4 \cot \alpha}{\cot^4 \alpha - 6 \cot^2 \alpha + 1}$

5. $\tan g\, 5\alpha = \dfrac{5 \cot^4 \alpha - 10 \cot^2 \alpha + 1}{\cot^5 \alpha - 10 \cot^3 \alpha + 5 \cot \alpha}$

6. $\tan g\, 6\alpha = \dfrac{6 \cot^5 \alpha - 20 \cot^3 \alpha + 6 \cot \alpha}{\cot^6 \alpha - 15 \cot^4 \alpha + 15 \cot^2 \alpha - 1}$

7. $\tan 7\alpha = \dfrac{7\cot^6\alpha - 35\cot^4\alpha + 21\cot^2\alpha - 1}{\cot^7\alpha - 21\cot^5\alpha + 35\cot^3\alpha - 7\cot\alpha}$

8. $\tan 8\alpha = \dfrac{8\cot^7\alpha - 56\cot^5\alpha + 56\cot^3\alpha - 8\cot\alpha}{\cot^8\alpha - 28\cot^6\alpha + 70\cot^4\alpha - 28\cot^2\alpha + 1}$

9. $\tan 9\alpha = \dfrac{9\cot^8\alpha - 84\cot^6\alpha + 126\cot^4\alpha - 36\cot^2\alpha + 1}{\cot^9\alpha - 36\cot^7\alpha + 126\cot^5\alpha - 84\cot^3\alpha + 9\cot\alpha}$

10. $\tan 10\alpha = \dfrac{10\cot^9\alpha - 12\cot^7\alpha + 252\cot^5\alpha - 120\cot^3\alpha + 10\cot\alpha}{\cot^{10}\alpha - 45\cot^8\alpha + 210\cot^6\alpha - 210\cot^4\alpha + 45\cot^2\alpha - 1}$

D) Ausdrücke für die *Cotangente*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die *Cotangente* eines vielfachen Bogens.

1. $\cot n\alpha =$

$$= \frac{1 - \frac{n.(n-1)}{1.2}.\tan^2\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\tan^4\alpha - \ldots}{n.\tan\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\tan^3\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}.\tan^5\alpha - \ldots}$$

2. $\cot n\alpha =$

$$= \frac{\cot^n\alpha - \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cot^{n-2}\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\cot^{n-4}\alpha - \ldots}{n.\cot^{n-1}\alpha - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\cot^{n-3}\alpha + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5}.\cot^{n-5}\alpha - \ldots}$$

b) Bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen.

aa) Ausgedrückt durch die *Tangenten* des einfachen Bogens.

1. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

2. $\cot 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$

3. $\cot 3\alpha = \dfrac{1 - 3\tan^2\alpha}{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}$

4. $\cot 4\alpha = \dfrac{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}{4\tan\alpha - 4\tan^3\alpha}$

5. $\cot 5\alpha = \dfrac{1 - 10\tan^2\alpha + 5\tan^4\alpha}{5\tan\alpha - 10\tan^3\alpha + \tan^5\alpha}$

6. $\cot 6\alpha = \dfrac{1 - 15\tan^2\alpha + 15\tan^4\alpha - \tan^6\alpha}{6\tan\alpha - 20\tan^3\alpha + 6\tan^5\alpha}$

7. $\cot 7\alpha = \frac{1 - 21\, tang^2\alpha + 35\, tang^4\alpha - 7\, tang^6\alpha}{7\, tang\,\alpha - 35\, tang^3\alpha + 21\, tang^5\alpha - tang^7\alpha}$

8. $\cot 8\alpha = \frac{1 - 28\, tang^2\alpha + 70\, tang^4\alpha - 28\, tang^6\alpha - tang^8\alpha}{8\, tang\,\alpha - 56\, tang^3\alpha + 56\, tang^5\alpha - 8\, tang^7\alpha}$

9. $\cot 9\alpha = \frac{1 - 36\, tang^2\alpha - 126\, tang^4\alpha - 84\, tang^6\alpha + 9\, tang^8\alpha}{9\, tang\,\alpha - 84\, tang^3\alpha + 126\, tang^5\alpha - 36\, tang^7\alpha + tang^9\alpha}$

10. $\cot 10\alpha = \frac{1 - 45\, tang^2\alpha + 210\, tang^4\alpha - 210\, tang^6\alpha + 45\, tang^8\alpha - tang^{10}\alpha}{10\, tang\,\alpha - 120\, tang^3\alpha + 252\, tang^5\alpha - 120\, tang^7\alpha + 10\, tang^9\alpha}$

bb) Ausgedrückt durch die *Cotangenten* des einfachen Bogens.

1. $\cot\alpha = \cot\alpha$

2. $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

3. $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

4. $\cot 4\alpha = \frac{\cot^4\alpha - 6\cot^2\alpha + 1}{4\cot^3\alpha - 4\cot\alpha}$

5. $\cot 5\alpha = \frac{\cot^5\alpha - 10\cot^3\alpha + 5\cot\alpha}{5\cot^4\alpha - 10\cot^2\alpha + 1}$

6. $\cot 6\alpha = \frac{\cot^6\alpha - 15\cot^4\alpha + 15\cot^2\alpha - 1}{6\cot^5\alpha - 20\cot^3\alpha + 6\cot\alpha}$

7. $\cot 7\alpha = \frac{\cot^7\alpha - 21\cot^5\alpha + 35\cot^3\alpha - 7\cot\alpha}{7\cot^6\alpha - 35\cot^4\alpha + 21\cot^2\alpha - 1}$

8. $\cot 8\alpha = \frac{\cot^8\alpha - 28\cot^6\alpha + 70\cot^4\alpha - 28\cot^2\alpha + 1}{8\cot^7\alpha - 56\cot^5\alpha + 56\cot^3\alpha - 8\cot\alpha}$

9. $\cot 9\alpha = \frac{\cot^9\alpha - 36\cot^7\alpha + 126\cot^5\alpha - 84\cot^3\alpha + 9\cot\alpha}{9\cot^8\alpha - 84\cot^6\alpha + 126\cot^4\alpha - 36\cot^2\alpha + 1}$

10. $\cot 10\alpha = \frac{\cot^{10}\alpha - 45\cot^8\alpha + 210\cot^6\alpha - 210\cot^4\alpha + 45\cot^2\alpha - 1}{10\cot^9\alpha - 120\cot^7\alpha + 252\cot^5\alpha - 120\cot^3\alpha + 10\cot\alpha}$

E) Ausdrücke für die *Secante.*

a) Allgemeiner Ausdruck für die *Secante* eines vielfachen Bogens.

$$\sec n\alpha = \frac{\sec^n\alpha}{2^{n-1} - \frac{n}{1}.2^{n-3}\sec^2\alpha + \frac{n.(n-3)}{1.2}.2^{n-5}\sec^4\alpha - \frac{n.(n-4).(n-5)}{1.2.3}.2^{n-7}\sec^6\alpha + \frac{n.(n-5).(n-6).(n-7)}{1.2.3.4}.2^{n-9}\sec^8\alpha - \ldots}$$

b) **Bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen, ausgedrückt durch die *Secanten* des einfachen Bogens.**

1. $\sec\alpha = \sec\alpha$

2. $\sec 2\alpha = \dfrac{\sec^2\alpha}{2 - \sec^2\alpha}$

3. $\sec 3\alpha = \dfrac{\sec^3\alpha}{4 - 3\sec^2\alpha}$

4. $\sec 4\alpha = \dfrac{\sec^4\alpha}{8 - 8\sec^2\alpha + \sec^4\alpha}$

5. $\sec 5\alpha = \dfrac{\sec^5\alpha}{16 - 20\sec^2\alpha + 5\sec^4\alpha}$

6. $\sec 6\alpha = \dfrac{\sec^6\alpha}{32 - 48\sec^2\alpha + 18\sec^4\alpha - \sec^6\alpha}$

7. $\sec 7\alpha = \dfrac{\sec^7\alpha}{64 - 112\sec^2\alpha + 56\sec^4\alpha - 7\sec^6\alpha}$

8. $\sec 8\alpha = \dfrac{\sec^8\alpha}{128 - 256\sec^2\alpha + 160\sec^4\alpha - 32\sec^6\alpha + \sec^8\alpha}$

9. $\sec 9\alpha = \dfrac{\sec^9\alpha}{256 - 576\sec^2\alpha + 432\sec^4\alpha - 120\sec^6\alpha + 9\sec^8\alpha}$

10. $\sec 10\alpha = \dfrac{\sec^{10}\alpha}{512 - 1280\sec^2\alpha + 1120\sec^4\alpha - 400\sec^6\alpha + 50\sec^8\alpha - \sec^{10}\alpha}$

F) Ausdrücke für die *Cosecante.*

a) **Allgemeine Ausdrücke für die *Cosecante* eines vielfachen Bogens.**

1. $$\operatorname{cosec} n\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^n\alpha}{\frac{n}{1}.\operatorname{cosec}^{n-1}\alpha - \frac{n.(n^2-1)}{1.2.3}.\operatorname{cosec}^{n-3}\alpha + \frac{n.(n^2-1).(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}.\operatorname{cosec}^{n-5}\alpha - \frac{n.(n^2-1).(n^2-3^2).(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}.\operatorname{cosec}^{n-7}\alpha + \ldots}$$

diese Reihe gilt, wenn n eine rationale **ungerade** Zahl ist.

2. $$\operatorname{cosec} n\alpha = \frac{\operatorname{cosec}^n\alpha}{\left(\frac{n}{1}.\operatorname{cosec}^{n-2}\alpha - \frac{n.(n^2-2^2)}{1.2.3}.\operatorname{cosec}^{n-4}\alpha + \frac{n.(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}.\operatorname{cosec}^{n-6}\alpha - \ldots\right).\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)}}$$

diese Reihe gilt, wenn n eine rationale **gerade** Zahl ist.

b) Bestimmte Vervielfältigungen bis zum Zehnfachen.

1. $cosec\,\alpha \quad = cosec\,\alpha$

2. $$cosec\,2\alpha = \frac{cosec^2\alpha}{2\sqrt{(cosec^2\alpha - 1)}}$$

3. $$cosec\,3\alpha = \frac{cosec^3\alpha}{3\,cosec^2\alpha - 4}$$

4. $$cosec\,4\alpha = \frac{cosec^4\alpha}{(4\,cosec^2\alpha - 8)\,.\sqrt{(cosec^2\alpha - 1)}}$$

5. $$cosec\,5\alpha = \frac{cosec^5\alpha}{5\,cosec^4\alpha - 20\,cosec^2\alpha - 16}$$

6. $$cosec\,6\alpha = \frac{cosec^6\alpha}{(6\,cosec^4\alpha - 32\,cosec^2\alpha + 32)\,.\sqrt{(cosec^2\alpha - 1)}}$$

7. $$cosec\,7\alpha = \frac{cosec^7\alpha}{7\,cosec^6\alpha - 56\,cosec^4\alpha + 112\,cosec^2\alpha - 64}$$

8. $$cosec\,8\alpha = \frac{cosec^8\alpha}{(8\,cosec^6\alpha - 80\,cosec^4\alpha + 192\,cosec^2\alpha - 128)\,.\sqrt{(cosec^2\alpha - 1)}}$$

9. $$cosec\,9\alpha = \frac{cosec^9\alpha}{9\,cosec^7\alpha - 120\,cosec^5\alpha + 432\,cosec^3\alpha - 576\,cqsec\,\alpha - 256}$$

10. $cosec\,10\alpha =$

$$= \frac{cosec^{10}\alpha}{(10\,cosec^8\alpha - 160\,cosec^6\alpha + 672\,cosec^4\alpha - 1024\,cosec^2\alpha + 512)\,.\sqrt{(cosec^2\alpha - 1)}}$$

XI. Potenzen der trigonometrischen Funktionen.

A) Potenzen des *Sinus*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen des *Sinus*.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

$$1.\quad \pm 2^{n-1} \sin^n \alpha = \sin n\alpha - n . \sin (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} . \sin (n-4)\alpha - \\ - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} . \sin (n-6)\alpha \ldots . \pm \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots .\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots .\left(\frac{n-1}{2}\right)} . \sin \alpha$$

das obere Zeichen gilt, wenn $\frac{n}{4}$ den Rest 1 läſst, und das untere, wenn $\frac{n}{4}$ den Rest 3 läſst.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

$$2.\quad \pm 2^{n-1} \sin^n \alpha = \cos n\alpha - n . \cos (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} . \cos (n-4)\alpha - \\ - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} . \cos (n-6)\alpha \ldots . \pm \frac{\frac{1}{2} . n(n-1).(n-2)\ldots .\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots .\frac{n}{2}}$$

das obere Zeichen gilt, wenn n durch 4 theilbar; das untere, wenn n blos durch 2 theilbar.

b) Bestimmte Potenzen bis zur Zehnten.

1. $\sin \alpha = \sin \alpha$
2. $\sin^2 \alpha = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - 1) = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
3. $\sin^3 \alpha = -\frac{1}{4}(\sin 3\alpha - 3 \sin \alpha) = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$
4. $\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$
5. $\sin^5 \alpha = \frac{1}{16}(\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha)$
6. $\sin^6 \alpha = -\frac{1}{32}(\cos 6\alpha - 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha - 10) = \frac{10 - 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{32}$

7. $\sin^7\alpha = -\frac{1}{64}(\sin 7\alpha - 7\sin 5\alpha + 21\sin 3\alpha - 35\sin\alpha) =$
$= \frac{35\sin\alpha - 21\sin 3\alpha + 7\sin 5\alpha - \sin 7\alpha}{64}$

8. $\sin^8\alpha = \frac{1}{128}(\cos 8\alpha - 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha - 56\cos 2\alpha + 35)$

9. $\sin^9\alpha = \frac{1}{256}(\sin 9\alpha - 9\sin 7\alpha + 36\sin 5\alpha - 84\sin 3\alpha + 126\sin\alpha)$

10. $\sin^{10}\alpha = -\frac{1}{512}(\cos 10\alpha - 10\cos 8\alpha + 45\cos 6\alpha - 120\cos 4\alpha +$
$+ 210\cos 2\alpha - 126) =$
$= \frac{126 - 210\cos 2\alpha + 120\cos 4\alpha - 45\cos 6\alpha + 10\cos 8\alpha - \cos 10\alpha}{512}$

Anmerkung. Es giebt keine reelle Werthe:

1) Für eine allgemeine Formel der Potenzen des *Sinus*, ausgedrückt durch den *Sinus* oder *Cosinus* des mehrfachen Bogens.

2) Für die Potenzen des *Sinus*, ausgedrückt durch den *Sinus* der geraden mehrfachen Bogen.

3) Für die Potenzen des *Sinus*, ausgedrückt durch den *Cosinus* der ungeraden mehrfachen Bogen.

B) Potenzen des *Cosinus*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen des *Cosinus*.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

1. $2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + n.\cos(n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots$
$\ldots \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}.\cos\alpha$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

2. $2^{n-1}\cos^n\alpha = \cos n\alpha + n.\cos(n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cos(n-4)\alpha + \ldots\ldots$
$\ldots \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}$

b) Bestimmte Potenzen bis zur Zehnten.

1. $\cos^1\alpha = \cos\alpha$

2. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$

3. $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$

4. $\cos^4 \alpha = \frac{1}{8} (\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$
5. $\cos^5 \alpha = \frac{1}{16} (\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha)$
6. $\cos^6 \alpha = \frac{1}{32} (\cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha + 10)$
7. $\cos^7 \alpha = \frac{1}{64} (\cos 7\alpha + 7 \cos 5\alpha + 21 \cos 3\alpha + 35 \cos \alpha)$
8. $\cos^8 \alpha = \frac{1}{128} (\cos 8\alpha + 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha + 56 \cos 2\alpha + 35)$
9. $\cos^9 \alpha = \frac{1}{256} (\cos 9\alpha + 9 \cos 7\alpha + 36 \cos 5\alpha + 84 \cos 3\alpha + 126 \cos \alpha)$
10. $\cos^{10} \alpha = \frac{1}{512} (\cos 10\alpha + 10 \cos 8\alpha + 45 \cos 6\alpha - 120 \cos 4\alpha + 210 \cos 2\alpha - 126)$

Anmerkung. Es ist unmöglich, für die Potenzen des *Cosinus* reelle Werthe, durch den *Sinus* des mehrfachen Bogens ausgedrückt, zu erhalten.

C) Potenzen der *Tangente*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen der *Tangente*.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

1. $\tang^n \alpha =$

$$\frac{\sin n\alpha - n \cdot \sin (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \sin (n-4)\alpha - \ldots \frac{n.(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \sin \alpha}{\cos n\alpha + n \cdot \cos (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \cos (n-4)\alpha + \ldots \frac{n.(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \cos \alpha}$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

2. $\tang^n \alpha =$

$$\frac{\cos n\alpha - n \cdot \cos (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \cos (n-4)\alpha - \ldots \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}}{\cos n\alpha + n \cdot \cos (n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \cos (n-4)\alpha + \ldots \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}}$$

Anmerkung. Werthe für die Potenzen der *Tangente* durch die *Tangenten* des mehrfachen Bogens ausgedrückt, lassen sich aus den in X. C. b gegebenen Formeln entwickeln. Man wird dieselben als Gleichungen behandeln, und so $\tang^2 \alpha$, $\tang^3 \alpha$ u. s. w. durch successive Substitutionen erlangen können. Einige dieser Werthe sind in der folgenden Potenzentafel mit aufgenommen.

b) Bestimmte Potenzen der *Tangente* bis zur Zehnten.

1. $tang^1 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

2. $tang^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{tang\, 2\alpha - 2\, tang\, \alpha}{tang\, 2\alpha} = 1 - \frac{2\, tang\, \alpha}{tang\, 2\alpha}$

3. $tang^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha} =$

$= \frac{3\, tang\, \alpha \,.\, tang\, 2\alpha - 6\, tang\, \alpha \,.\, tang\, 3\alpha + 2\, tang\, 2\alpha \,.\, tang\, 3\alpha}{tang\, 2\alpha}$

4. $tang^4 \alpha = \frac{4 \cos 2\alpha - \cos 4\alpha - 3}{4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + 3}$

5. $tang^5 \alpha = \frac{\sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin \alpha}{\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha}$

6. $tang^6 \alpha = \frac{\cos 6\alpha - 6 \cos 4\alpha + 15 \cos \alpha - 10}{\cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos \alpha + 10}$

7. $tang^7 \alpha = \frac{\sin 7\alpha - 7 \sin 5\alpha + 21 \sin 3\alpha - 35 \sin \alpha}{\cos 7\alpha + 7 \cos 5\alpha + 21 \cos 3\alpha + 35 \cos \alpha}$

8. $tang^8 \alpha = \frac{\cos 8\alpha - 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha - 56 \cos 2\alpha + 35}{\cos 8\alpha + 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha + 56 \cos 2\alpha + 35}$

9. $tang^9 \alpha = \frac{\sin 9\alpha - 9 \sin 7\alpha + 36 \sin 5\alpha - 84 \sin 3\alpha + 120 \sin \alpha}{\cos 9\alpha + 9 \cos 7\alpha + 36 \cos 5\alpha + 84 \cos 3\alpha + 120 \cos \alpha}$

10. $tang^{10} \alpha = \frac{\cos 10\alpha - 10 \cos 8\alpha + 45 \cos 6\alpha - 120 \cos 4\alpha + 210 \cos 2\alpha - 126}{\cos 10\alpha + 10 \cos 8\alpha + 45 \cos 6\alpha + 120 \cos 4\alpha + 210 \cos 2\alpha + 126}$

D) Potenzen der *Cotangente*.

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen der *Cotangente*.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

1. $\cot^n \alpha =$

$$\frac{\cos n\alpha + n \,.\, \cos (n-2)\,\alpha + \frac{n\,.(n-1)}{1\,.\,2} \,.\, \cos (n-4)\,\alpha + \ldots \frac{n\,.(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)} \,.\, \cos \alpha}{\sin n\alpha - n \,.\, \sin (n-2)\,\alpha + \frac{n\,.(n-1)}{1\,.\,2} \,.\, \sin (n-4)\,\alpha - \ldots \frac{n\,.(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)} \,.\, \sin \alpha}$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

2. $\cot^{n}\alpha =$

$$\frac{\cos n\alpha + n\,.\cos(n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cos(n-4)\alpha + \ldots \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}}{\cos n\alpha - n\,.\cos(n-2)\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\cos(n-4)\alpha - \ldots \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}}$$

b) **Bestimmte Potenzen der *Cotangente* bis zur Zehnten.**

1. $\cot^{1}\alpha = \cot\alpha$

2. $\cot^{2}\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\cot\alpha - 2\cot 2\alpha}$

3. $\cot^{3}\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{3\sin\alpha - \sin 3\alpha} = \frac{\cot\alpha\,.\cot 3\alpha}{3\cot 3\alpha - 6\cot 2\alpha + 2\cot\alpha}$

4. $\cot^{4}\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}$

5. $\cot^{5}\alpha = \frac{\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha}{\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha}$

6. $\cot^{6}\alpha = \frac{\cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10}{\cos 6\alpha - 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha - 10}$

7. $\cot^{7}\alpha = \frac{\cos 7\alpha + 7\cos 5\alpha + 21\cos 3\alpha + 35\cos\alpha}{\sin 7\alpha - 7\sin 5\alpha + 21\sin 3\alpha - 35\sin\alpha}$

8. $\cot^{8}\alpha = \frac{\cos 8\alpha + 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha + 56\cos 2\alpha + 35}{\cos 8\alpha - 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha - 56\cos 2\alpha + 35}$

9. $\cot^{9}\alpha = \frac{\cos 9\alpha + 9\cos 7\alpha + 36\cos 5\alpha + 84\cos 3\alpha + 126\cos\alpha}{\sin 9\alpha - 9\sin 7\alpha + 36\sin 5\alpha - 84\sin 3\alpha - 126\sin\alpha}$

10. $\cot^{10}\alpha = \frac{\cos 10\alpha + 10\cos 8\alpha + 45\cos 6\alpha + 120\cos 4\alpha + 210\cos 2\alpha + 126}{\cos 10\alpha - 10\cos 8\alpha + 45\cos 6\alpha - 120\cos 4\alpha + 210\cos 2\alpha - 126}$

E) Potenzen der *Secante.*

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen der *Secante.*

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

1. $sec^n \alpha =$

$$\frac{2^{n-1}}{\cos n\alpha + n \,.\, \cos (n-2)\,\alpha + \frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2} \,.\, \cos (n-4)\,\alpha + \ldots\ldots \frac{n\,.\,(n-1) \ldots\ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \,.\, \cos \alpha}$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

2. $sec^n \alpha =$

$$\frac{2^{n-1}}{\cos n\alpha + n \,.\, \cos (n-2)\,\alpha + \frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2} \,.\, \cos (n-4)\,\alpha + \ldots\ldots \frac{\frac{n}{2}\,.\,(n-1)\,.\,(n-2) \ldots\ldots \left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots \frac{n}{2}}}$$

b) Bestimmte Potenzen der *Secante* bis zur Zehnten.

1. $sec^1 \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

2. $sec^2 \alpha = \frac{2}{\cos 2\alpha + 1}$

3. $sec^3 \alpha = \frac{4}{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}$

4. $sec^4 \alpha = \frac{8}{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}$

5. $sec^5 \alpha = \frac{16}{\cos 5\alpha + 5 \cos 3\alpha + 10 \cos \alpha}$

6. $sec^6 \alpha = \frac{32}{\cos 6\alpha + 6 \cos 4\alpha + 15 \cos 2\alpha + 10}$

7. $sec^7 \alpha = \frac{64}{\cos 7\alpha + 7 \cos 5\alpha + 21 \cos 3\alpha + 35 \cos \alpha}$

8. $sec^8 \alpha = \frac{128}{\cos 8\alpha + 8 \cos 6\alpha + 28 \cos 4\alpha + 56 \cos 2\alpha + 35}$

9. $sec^9\,\alpha = \dfrac{256}{\cos 9\alpha + 9\cos 7\alpha + 36\cos 5\alpha + 84\cos 3\alpha + 126\cos\alpha}$

10. $sec^{10}\,\alpha = \dfrac{512}{\cos 10\alpha + 10\cos 8\alpha + 45\cos 6\alpha + 120\cos 4\alpha + 210\cos 2\alpha + 126}$

F) Potenzen der *Cosecante.*

a) Allgemeine Ausdrücke für die Potenzen der *Cosecante.*

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so gilt:

1. $cosec^n\,\alpha =$

$$\frac{2^{n-1}}{\sin n\alpha - n\,.\sin(n-2)\,\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}\,.\sin(n-4)\,\alpha - \ldots\, \frac{n.(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,.\sin\alpha}$$

dieser Ausdruck ist positiv, wenn n durch 4 dividirt, den Rest 1 läfst; er ist hingegen negativ, wenn dabei der Rest 3 bleibt.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so gilt:

2. $cosec^n\,\alpha =$

$$\frac{2^{n-1}}{\cos n\alpha - n\,.\cos(n-2)\,\alpha + \frac{n.(n-1)}{1.2}\,.\cos(n-4)\,\alpha - \ldots\, \frac{\frac{n}{2}.(n-1).(n-2)\ldots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}}$$

dieser Ausdruck ist positiv, wenn n durch 4 theilbar ist, hingegen negativ, wenn n blos durch 2 theilbar ist.

b) Bestimmte Potenzen der *Cosecante* bis zur Zehnten.

1. $cosec^1\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

2. $cosec^2\,\alpha = \dfrac{2}{1 - \cos 2\alpha}$

3. $cosec^3\,\alpha = \dfrac{4}{\sin 3\alpha - 3\sin\alpha}$

4. $cosec^4\,\alpha = \dfrac{8}{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}$

5. $cosec^5\,\alpha = \frac{16}{\sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha}$

6. $cosec^6\,\alpha = \frac{32}{6\cos 4\alpha - \cos 6\alpha - 15\cos 2\alpha + 10}$

7. $cosec^7\,\alpha = \frac{64}{7\sin 5\alpha - \sin 7\alpha - 21\sin 3\alpha + 35\sin\alpha}$

8. $cosec^8\,\alpha = \frac{128}{\cos 8\alpha - 8\cos 6\alpha + 28\cos 4\alpha - 56\cos 2\alpha + 35}$

9. $cosec^9\,\alpha = \frac{256}{\sin 9\alpha - 9\sin 7\alpha + 36\sin 5\alpha - 84\sin 3\alpha + 126\sin\alpha}$

10. $cosec^{10}\,\alpha = \frac{512}{10\cos 8\alpha - \cos 10\,\alpha - 45\cos 6\alpha + 120\cos 4\alpha - 210\cos 2\alpha + 126}$

G) Werthe für die Potenzen der Funktionen, ausgedrückt durch Reihen von den Potenzen anderer Funktionen.

a) Reihen für den *Sinus.*

1. $\sin^n\alpha = 1 - \frac{n}{2}.\cos^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}.\cos^4\alpha - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}.\cos^6\alpha + \ldots.$

2. $\sin^n\alpha = tang\,\alpha - \frac{n}{2}.tang^3\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}.tang^5\alpha - \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^2}.$
$.tang^7\alpha + \ldots.$

3. $\sin^n\alpha = 1 - \frac{n}{2}.\cot^2\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}.\cot^4\alpha - \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}.\cot^6\alpha + \ldots.$

4. $\sin^n\alpha = 1 - \frac{n}{2}.\frac{1}{\sec^2\alpha} + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}.\frac{1}{\sec^4\alpha} - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}.\frac{1}{\sec^6\alpha} + \ldots.$

b) Reihen für den *Cosinus.*

1. $\cos^n\alpha = 1 - \frac{n}{2}.\sin^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}.\sin^4\alpha - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}.\sin^6\alpha + \ldots.$

2. $\cos^n\alpha = 1 - \frac{n}{2}.tang^2\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}.tang^4\alpha - \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}.tang^6\alpha + \ldots.$

3. $\cos^n\alpha = \cot^n\alpha.\Big(1 - \frac{n}{2}.\cot^2\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}.\cot^4\alpha - \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}.$
$.\cot^6\alpha + \ldots.\Big)$

4. $\cos^n \alpha = 1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{cosec^2 \alpha} + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2} \cdot \frac{1}{cosec^4 \alpha} - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3} \cdot$
$\cdot \frac{1}{cosec^6 \alpha} + \ldots.$

c) Reihen für die *Tangente.*

1. $tang^n \alpha = \sin^n \alpha . \left(1 + \frac{n}{2} . \sin^2 \alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2} . \sin^4 \alpha + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \sin^6 \alpha + \ldots.\right)$

2. $tang^n \alpha = \frac{1}{\cos^n \alpha} . \left(1 - \frac{n}{2} . \cos^2 \alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2} . \cos^4 \alpha - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \cos^6 \alpha + \ldots.\right)$

3. $tang^n \alpha = \sec^n \alpha . \left(1 - \frac{n}{2} . \frac{1}{\sec^2 \alpha} + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2} . \frac{1}{\sec^4 \alpha} - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \frac{1}{\sec^6 \alpha} + \ldots.\right)$

4. $tang^n \alpha = \frac{1}{cosec^n \alpha} . \left(1 + \frac{n}{2} . \frac{1}{cosec^2 \alpha} + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2} . \frac{1}{cosec^4 \alpha} + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \frac{1}{cosec^6 \alpha} + \ldots.\right)$

d) Reihen für die *Cotangente.*

1. $\cot^n \alpha = \frac{1}{\sin^n \alpha} . \left(1 - \frac{n}{2} . \sin^2 \alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2} . \sin^4 \alpha - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \sin^6 \alpha + \ldots.\right)$

2. $\cot^n \alpha = \cos^n \alpha . \left(1 + \frac{n}{2} . \cos^2 \alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2} . \cos^4 \alpha + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \cos^6 \alpha + \ldots.\right)$

3. $\cot^n \alpha = \frac{1}{\sec^n \alpha} . \left(1 + \frac{n}{2} . \frac{1}{\sec^2 \alpha} + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2} . \frac{1}{\sec^4 \alpha} + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3} .\right.$
$\left. . \frac{1}{\sec^6 \alpha} + \ldots.\right)$

4. $\cot^n\alpha = \operatorname{cosec}^n\alpha\left(1 - \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^4\alpha} - \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}\cdot\right.$
$\left.\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^6\alpha} + \ldots\right)$

e) Reihen für die *Secante*.

1. $\sec^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\sin^2\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}\cdot\sin^4\alpha + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}\cdot\sin^6\alpha + \ldots$

2. $\sec^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\operatorname{tang}^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}\cdot\operatorname{tang}^4\alpha + \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}\cdot\operatorname{tang}^6\alpha + \ldots$

3. $\sec^n\alpha = \frac{1}{\cot^n\alpha}\cdot\left(1 + \frac{n}{2}\cdot\cot^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}\cdot\cot^4\alpha + \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}\cdot\right.$
$\left.\cdot\cot^6\alpha + \ldots\right)$

4. $\sec^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^4\alpha} + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^6\alpha} + \ldots$

f) Reihen für die *Cosecante*.

1. $\operatorname{cosec}^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\cos^2\alpha + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}\cdot\cos^4\alpha + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}\cdot\cos^6\alpha + \ldots$

2. $\operatorname{cosec}^n\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}^n\alpha}\cdot\left(1 + \frac{n}{2}\cdot\operatorname{tang}^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}\cdot\operatorname{tang}^4\alpha + \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}\cdot\right.$
$\left.\cdot\operatorname{tang}^6\alpha + \ldots\right)$

3. $\operatorname{cosec}^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\cot^2\alpha + \frac{n.(n-2)}{1.2.2^2}\cdot\cot^4\alpha + \frac{n.(n-2).(n-4)}{1.2.3.2^3}\cdot\cot^6\alpha + \ldots$

4. $\operatorname{cosec}^n\alpha = 1 + \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\alpha} + \frac{n.(n+2)}{1.2.2^2}\cdot\frac{1}{\sec^4\alpha} + \frac{n.(n+2).(n+4)}{1.2.3.2^3}\cdot\frac{1}{\sec^6\alpha} + \ldots$

XII. Allgemeine Ausdrücke für die Funktionen der Summe oder Differenz zweier Bogen.

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

5. $$\mathrm{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta}{1 - \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1} = \frac{1 + \mathrm{tang}\,\beta \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha - \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \mathrm{tang}\,\alpha}$$

6. $$\mathrm{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1} = \frac{1 - \mathrm{tang}\,\beta \cdot \cot\alpha}{\cot\alpha + \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \mathrm{tang}\,\alpha}$$

7. $$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha} = \frac{1 - \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}{1 + \cot\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta - \mathrm{tang}\,\alpha}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \cot\beta}$$

8. $$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{1 + \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\alpha + \mathrm{tang}\,\beta}{1 - \cot\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\cot\beta + \mathrm{tang}\,\alpha}{\mathrm{tang}\,\alpha \cdot \cot\beta - 1}$$

9. $$\sec(\alpha+\beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{1 - \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta - \sec\alpha \cdot \sec\beta}$$

10. $$\sec(\alpha-\beta) = \frac{\sec\alpha \cdot \sec\beta}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{tang}\,\beta} = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta + \sec\alpha \cdot \sec\beta}$$

11. $$\mathrm{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta}{\cot\beta + \cot\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha} = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha + \mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \sec\beta}$$

12. $$\mathrm{cosec}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta}{\mathrm{cosec}\,\beta - \mathrm{cosec}\,\alpha} = \frac{\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha - \mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \sec\beta}$$

XIII. Formeln, welche aus der Verbindung der Funktionen zweier verschiedener Bogen entstehen.

A) Summe oder Differenz der Funktionen zweier Bogen.

Grundform: $F(\alpha) + F(\beta)$

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.\sin(\alpha+\beta)$

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.\sin(\alpha+\beta)$

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

5. $\tang\alpha + \tang\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

6. $\tang\alpha - \tang\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

7. $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

8. $\cot\beta - \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$

9. $\cot\alpha + \tang\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha.\cos\beta}$

10. $\cot\alpha - \tang\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\cos\beta}$

11. $\sec\alpha + \sec\beta = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha.\cos\beta}$

12. $\sec\beta - \sec\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha.\cos\beta}$

13. $cosec\,\alpha + cosec\,\beta = \dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\,.\sin\beta}$

14. $cosec\,\beta - cosec\,\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\,.\sin\beta}$

B) Differenz der Quadrate der Funktionen zweier Bogen.

Grundform: $F^2(\alpha) - F^2(\beta)$

1. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)$
2. $\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)$
3. $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha-\beta)\,.\cos(\alpha+\beta)$
4. $tang^2\alpha - tang^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\,.\cos^2\beta}$
5. $\cot^2\beta - \cot^2\alpha = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\,.\sin^2\beta}$
6. $\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)\,.\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\,.\cos^2\beta}$
7. $\cot^2\beta - tang^2\alpha = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)\,.\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\,.\sin^2\beta}$
8. $\sec^2\alpha - \sec^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\,.\cos^2\beta}$
9. $cosec^2\alpha - cosec^2\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)\,.\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\,.\sin^2\beta}$

C) Produkte und Quotienten aus den Funktionen zweier Bogen.

Grundformen: $F(\alpha)\,.F(\beta)$ oder $\dfrac{F(\alpha)}{F(\beta)}$ und $F(\alpha)\,.F'(\beta)$ oder $\dfrac{F(\alpha)}{F'(\beta)}$

1. $\sin\alpha\,.\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} = \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} =$
$= \cos^2\frac{\alpha\mp\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)}{4\cos\alpha\,.\cos\beta}$

2. $\cos\alpha\,.\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} = \cos^2\frac{\alpha\mp\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} =$
$= \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$3.\quad \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$4.\quad \sin\beta \cdot \cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$5.\quad \tang\alpha \cdot \tang\beta = \frac{\cos(\alpha\mp\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha\mp\beta)}$$

$$6.\quad \cot\alpha \cdot \cot\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos(\alpha\mp\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$$

$$7.\quad \tang\alpha \cdot \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$8.\quad \tang\beta \cdot \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

$$9.\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+\cot\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha-\beta}{2}-\cot\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}+\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}-\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$10.\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}+\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\tang\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\tang\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha-\beta}{2}+\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$11.\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}-\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+\tang\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha-\beta}{2}-\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha-\beta}{2}+\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$12.\quad \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}-\tang\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tang\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\tang\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha-\beta}{2}-\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2}-1}$$

D) Summe und Differenz der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F(\alpha+\beta) \mp F(\alpha-\beta)$

1. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$
2. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta$
3. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

5. $\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot (\sin\beta + \cos\beta) =$
$= \sqrt{(1 + \sin 2\alpha) \cdot (1 + \sin 2\beta)}$

6. $\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = (\sin\alpha - \cos\alpha) \cdot (\sin\beta - \cos\beta) =$
$= \sqrt{(1 - \sin 2\alpha) \cdot (1 - \sin 2\beta)}$

7. $\mathrm{tang}(\alpha+\beta) + \mathrm{tang}(\alpha-\beta) = \dfrac{2 \cot\alpha \cdot \sec^2\beta}{\cot^2\alpha - \mathrm{tang}^2\beta} = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta}{\cot^2\beta - \mathrm{tang}^2\alpha}$

8. $\mathrm{tang}(\alpha+\beta) - \mathrm{tang}(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\beta \cdot \mathrm{cosec}^2\alpha}{\cot^2\alpha - \mathrm{tang}^2\beta} = \dfrac{2 \cot\beta \cdot \sec^2\alpha}{\cot^2\beta - \mathrm{tang}^2\alpha}$

9. $\cot(\alpha+\beta) + \cot(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\alpha \cdot \sec^2\beta}{\mathrm{tang}^2\alpha - \mathrm{tang}^2\beta} = \dfrac{2 \cot\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}$

10. $\cot(\alpha+\beta) - \cot(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\beta \cdot \sec^2\alpha}{\mathrm{tang}^2\beta - \mathrm{tang}^2\alpha} = \dfrac{2 \cot\beta \cdot \mathrm{cosec}^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cot^2\beta}$

11. $\sec(\alpha+\beta) + \sec(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta - \sec^2\alpha \cdot \sec^2\beta}$

12. $\sec(\alpha+\beta) - \sec(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec^2\alpha \cdot \sec^2\beta}{\mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta - \sec^2\alpha \cdot \sec^2\beta}$

13. $\mathrm{cosec}(\alpha+\beta) + \mathrm{cosec}(\alpha-\beta) = \dfrac{2\,\mathrm{cosec}\,\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\beta \cdot \sec^2\alpha \cdot \sec\beta}{\mathrm{cosec}^2\beta \cdot \sec^2\alpha - \mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \sec^2\beta}$

14. $\mathrm{cosec}(\alpha+\beta) - \mathrm{cosec}(\alpha-\beta) = \dfrac{-2\,\mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}\,\beta \cdot \sec\alpha \cdot \sec^2\beta}{\mathrm{cosec}^2\beta \cdot \sec^2\alpha - \mathrm{cosec}^2\alpha \cdot \sec^2\beta}$

E) Produkte und Quotienten der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundformen: $F(\alpha+\beta) \cdot F(\alpha-\beta)$ und $\dfrac{F(\alpha+\beta)}{F(\alpha-\beta)}$

1. $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \dfrac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} =$
$= (\sin\alpha + \sin\beta) \cdot (\sin\alpha - \sin\beta) = (\cos\beta + \cos\alpha) \cdot (\cos\beta - \cos\alpha)$

2. $\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2}$

3. $\sin(\alpha-\beta) \cdot \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{2}$

4. $\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{2} =$
$= (\cos\alpha + \sin\beta) \cdot (\cos\alpha - \sin\beta) = (\cos\beta + \sin\alpha) \cdot (\cos\beta - \sin\alpha)$

5. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{tang\,\alpha - tang\,\beta} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} =$

$= \frac{1 + tang\,\beta\,.\,\cot\alpha}{1 - tang\,\beta\,.\,\cot\alpha} = \frac{tang\,\alpha\,.\,\cot\beta + 1}{tang\,\alpha\,.\,\cot\beta - 1}$

6. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{1 + tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta} = \frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1} =$

$= \frac{1 + tang\,\beta\,.\,\cot\alpha}{\cot\alpha + tang\,\beta} = \frac{tang\,\alpha\,.\,\cot\beta + 1}{\cot\beta + tang\,\alpha}$

7. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1 - tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta}{1 + tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta} = \frac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1} =$

$= \frac{\cot\alpha - tang\,\beta}{\cot\alpha + tang\,\beta} = \frac{\cot\beta - tang\,\alpha}{\cot\beta + tang\,\alpha}$

8. $tang(\alpha+\beta)\,.\,tang(\alpha-\beta) = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

9. $tang(\alpha+\beta)\,.\,\cot(\alpha-\beta) = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$

10. $tang(\alpha+\beta)\,.\,\cot(\alpha+\beta) = 1$

11. $\cot(\alpha+\beta)\,.\,\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}$

12. $\frac{tang(\alpha+\beta)}{tang(\alpha-\beta)} = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}$

13. $\frac{tang(\alpha+\beta)}{\cot(\alpha-\beta)} = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}$

14. $\frac{\cot(\alpha+\beta)}{\cot(\alpha-\beta)} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$

15. $\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta) = 1 - 2\sin^2\beta = \cos 2\beta$

16. $\cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

F) Produkte der Summe oder Differenz von den *Sinus* oder *Cosinus* zweier Bogen.

Grundformen: $(F(\alpha) \mp F'(\beta))\,.\,(F'(\alpha) + F(\beta))$

1. $(\sin\alpha + \sin\beta)\,.\,(\sin\alpha - \sin\beta) = \sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}$

2. $(\sin\alpha + \cos\beta)\,.\,(\cos\beta - \sin\alpha) = \cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2}$

3. $(\sin\beta + \cos\alpha) \cdot (\cos\alpha - \sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2}$

4. $(\cos\alpha + \cos\beta) \cdot (\cos\beta - \cos\alpha) = \sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2}$

5. $(\sin\alpha + \sin\beta) \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) = 2\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. $(\sin\alpha + \sin\beta) \cdot (\cos\beta - \cos\alpha) = \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin(\alpha-\beta)$

7. $(\sin\alpha - \sin\beta) \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) = 2\sin(\alpha-\beta) \cdot \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$

8. $(\sin\alpha - \sin\beta) \cdot (\cos\beta - \cos\alpha) = 2\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

9. $(\sin\alpha + \cos\beta) \cdot (\sin\beta + \cos\alpha) = (1 + \sin(\alpha+\beta)) \cdot \cos(\alpha-\beta)$

10. $(\sin\alpha + \cos\beta) \cdot (\sin\beta - \cos\alpha) = (1 + \sin(\alpha-\beta)) \cdot \cos(\alpha+\beta)$

G) Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen zweier Bogen.

Grundformen: $\frac{F(\alpha) \mp F(\beta)}{F'(\alpha) \pm F'(\beta)}$ und $\frac{F(\alpha) \mp F(\beta)}{F(\alpha) \pm F(\beta)}$

1. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cot\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}$

2. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cot\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}}$

3. $\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$

5. $\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}$

6. $\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}$

7. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}$

8. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

9. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

10. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

11. $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

12. $\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

13. $\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta - \cos\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$

14. $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

15. $\frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

16. $\frac{\cot\alpha - \tan\beta}{\cot\alpha + \tan\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{1 - \tan\alpha\,.\,\tan\beta}{1 + \tan\alpha\,.\,\tan\beta} = \frac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1}$

17. $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta} = \tan\alpha\,.\,\tan\beta$

18. $\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\sin\alpha\,.\,\sin\beta}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta} = \tan\alpha\,.\,\tan\beta$

19. $\frac{\cot\alpha + \tan\beta}{\cot\beta + \tan\alpha} = \cot\alpha\,.\,\tan\beta$

20. $\frac{\cot\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \tan\alpha} = \cot\alpha\,.\,\tan\beta$

21. $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha - \tan\beta} = \tan\alpha\,.\,\tan(\alpha+\beta)$

22. $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha - \cot\beta} = \tan\alpha\,.\,\tan\beta = -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

23. $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha - \tan\beta} = \cot\beta\,.\,\tan(\alpha+\beta)$

24. $\frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{cot\,\alpha + tang\,\beta} = tang\,\alpha \,.\, tang\,(\alpha - \beta)$

25. $\frac{cot\,\beta - cot\,\alpha}{cot\,\alpha + tang\,\beta} = cot\,\beta \,.\, tang\,(\alpha - \beta)$

26. $\frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{cot\,\beta - tang\,\alpha} = tang\,\beta \,.\, tang\,(\alpha + \beta)$

27. $\frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{cot\,\beta + tang\,\alpha} = tang\,\beta \,.\, tang\,(\alpha - \beta)$

28. $\frac{cot\,\beta + cot\,\alpha}{cot\,\beta - tang\,\alpha} = cot\,\alpha \,.\, tang\,(\alpha + \beta)$

29. $\frac{cot\,\beta - cot\,\alpha}{cot\,\beta + tang\,\alpha} = cot\,\alpha \,.\, tang\,(\alpha - \beta)$

30. $\frac{cot\,\alpha - tang\,\beta}{tang\,\alpha + tang\,\beta} = cot\,\alpha \,.\, cot\,(\alpha + \beta)$

31. $\frac{cot\,\alpha + tang\,\beta}{tang\,\alpha - tang\,\beta} = cot\,\alpha \,.\, cot\,(\alpha - \beta)$

32. $\frac{cot\,\beta - tang\,\alpha}{cot\,\beta + cot\,\alpha} = tang\,\alpha \,.\, cot\,(\alpha + \beta)$

33. $\frac{cot\,\beta + tang\,\alpha}{cot\,\beta - cot\,\alpha} = tang\,\alpha \,.\, cot\,(\alpha - \beta)$

34. $\frac{cot\,\beta - tang\,\alpha}{tang\,\alpha + tang\,\beta} = cot\,\beta \,.\, cot\,(\alpha + \beta)$

35. $\frac{cot\,\beta + tang\,\alpha}{tang\,\alpha - tang\,\beta} = cot\,\beta \,.\, cot\,(\alpha - \beta)$

36. $\frac{cot\,\alpha - tang\,\beta}{cot\,\beta + cot\,\alpha} = tang\,\beta \,.\, cot\,(\alpha + \beta)$

37. $\frac{cot\,\alpha + tang\,\beta}{cot\,\beta - cot\,\alpha} = tang\,\beta \,.\, cot\,(\alpha - \beta)$

38. $\frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{cot\,\alpha + tang\,\beta} = \frac{tang\,\alpha \,.\, sin\,(\alpha + \beta)}{cos\,(\alpha - \beta)}$

39. $\frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{cot\,\alpha - tang\,\beta} = \frac{tang\,\alpha \,.\, sin\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)}$

40. $\frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{cot\,\beta - tang\,\alpha} = \frac{tang\,\beta \,.\, sin\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)}$

41. $\frac{cot\,\beta + cot\,\alpha}{cot\,\beta + tang\,\alpha} = \frac{cot\,\alpha \,.\, sin\,(\alpha + \beta)}{cos\,(\alpha - \beta)}$

42. $\frac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\alpha - \tang\beta} = \frac{\cot\beta \,.\, \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

43. $\frac{\sec\alpha + \sec\beta}{\sec\alpha - \sec\beta} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

44. $\frac{\sec\alpha + \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \tang\alpha \,.\, \tang\beta$

45. $\frac{\sec\alpha + \sec\beta}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \mathrm{cosec}\,\beta} = -\cot\frac{\alpha-\beta}{2} \,.\, \tang\alpha \,.\, \tang\beta$

46. $\frac{\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{cosec}\,\beta}{\mathrm{cosec}\,\alpha - \mathrm{cosec}\,\beta} = -\tang\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

H) Produkte aus den Quotienten der Summen oder Differenzen der *Sinus* zweier Bogen.

Grundform: $\frac{F(\alpha) \mp F(\beta)}{F(\alpha) \pm F(\beta)} \,.\, \frac{F'(\alpha) \mp F'(\beta)}{F'(\alpha) \pm F'(\beta)}$

1. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \,.\, \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tang^2\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \,.\, \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \tang\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cot^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

3. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \,.\, \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\frac{(\sin\alpha + \sin\beta)^2}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha} = \tang\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

5. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2} = \tang\frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, \tang\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. $\frac{(\sin\alpha - \sin\beta)^2}{\cos^2\beta - \cos^2\alpha} = 1$

I) Produkte und Quotienten der Summe oder Differenz der Funktionen von der Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundformen: $[F(\alpha+\beta) \mp F(\alpha-\beta)] \,.\, [F(\alpha+\beta) \pm F(\alpha-\beta)]$

und $\frac{F(\alpha+\beta) \mp F(\alpha-\beta)}{F(\alpha+\beta) \pm F(\alpha-\beta)}$

1. $[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \,.\, [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)] = \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\beta$

2. $[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \,.\, [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] = 2 \sin 2\alpha \,.\, \cos^2\beta$

3. $[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] . [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin^2\alpha . \sin 2\beta$

4. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] . [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] = 2\sin 2\beta . \cos^2\alpha$

5. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] . [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin 2\alpha . \sin^2\beta$

6. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] . [\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] = -\cos 2\beta . (1+\sin 2\alpha)$

7. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] . [\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \cos 2\alpha\,(1+\sin 2\beta)$

8. $[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] . [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \sin 2\alpha . \sin 2\beta$

9. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha . \cot\beta$

10. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \cot\alpha . \operatorname{tang}\beta$

11. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha . \cot\beta$

12. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang}\beta$

13. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha$

14. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\beta$

15. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\beta$

16. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha$

17. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$

18. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

19. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)-\operatorname{tang}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

20. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta) . \operatorname{tang}(\alpha-\beta)$

21. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin\alpha . \cos\alpha}{\sin\beta . \cos\beta} . \operatorname{tang}(\beta+\alpha) . \operatorname{tang}(\beta-\alpha)$

22. $\dfrac{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = -\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

23. $\dfrac{\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)}{\sec(\alpha+\beta)-\sec(\alpha-\beta)} = \cot\alpha . \cot\beta$

24. $\frac{\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)}{\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)+\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)} = \cot\alpha \, . \, \operatorname{tang}(\alpha+\beta) \, . \, \operatorname{tang}(\alpha-\beta)$

25. $\frac{\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)}{\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)-\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)} = -\cot\beta \, . \, \operatorname{tang}(\alpha+\beta) \, . \, \operatorname{tang}(\alpha-\beta)$

26. $\frac{\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)+\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)}{\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)-\operatorname{cosec}(\alpha-\beta)} = -\operatorname{tang}\alpha \, . \, \cot\beta$

27. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}^2\alpha \, . \, \cot\beta$

28. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\alpha \, . \, \cot^2\beta$

29. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot^2\beta$

30. $\frac{[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]^2}{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\alpha \, . \, \cot\beta = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$

31. $\frac{\sin^2(\alpha+\beta)^2-\sin^2(\alpha-\beta)}{[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]^2} = \operatorname{tang}\alpha \, . \, \operatorname{tang}\beta$

32. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)} = 1$

K) Quotienten von *Sinus* und *Cosinus* der Summe zweier Bogen, dividirt durch das Produkt derselben.

Grundform: $\frac{F(\alpha+\beta)}{F(\alpha) \, . \, F(\beta)}$

1. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \, . \, \cos\beta} = \operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta$

2. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \, . \, \sin\beta} = \cot\alpha + \cot\beta$

3. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \, . \, \cos\beta} = \operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta$

4. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \, . \, \sin\beta} = \cot\alpha - \cot\beta$

5. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \, . \, \cos\beta} = 1 - \operatorname{tang}\alpha \, . \, \operatorname{tang}\beta$

6. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \, . \, \sin\beta} = \cot\alpha \, . \, \cot\beta - 1$

7. $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \, . \, \cos\beta} = 1 + \operatorname{tang}\alpha \, . \, \operatorname{tang}\beta$

3. $[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = 2 \sin^2 \alpha$ ...

4. $[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] = 2 \sin$ ...

5. $[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = 2$ ...

6. $[\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \cdot [\sin(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] =$ ...

7. $[\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \cdot [\sin(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ ...

8. $[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha$ ...

9. $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \tang \alpha \cdot \cot \beta$

10. $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)} = \cot \alpha \cdot \tang$ ...

11. $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)} = \cot \alpha \cdot$ ...

12. $\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)} = \tan$ ...

13. $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} =$ ...

14. $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\ldots}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha\ldots}$

15. $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\ldots}{\cos(\alpha+\beta) + \cos\ldots}$

16. $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \ldots}{\cos(\alpha-\beta) - \ldots}$

17. $\frac{\sin(\alpha+\beta\ldots}{\sin(\alpha-\ldots}$

18. $\frac{\sin(\alpha\ldots}{\sin(\ldots}$

...enz der *Tangenten* von der halben ...me oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \mp F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

19. $\tan\ldots\frac{\ldots+\beta}{2} + \tang \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}$

20. $\ldots\frac{\alpha+\beta}{2} - \tang \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$

$\ldots\cot \frac{\alpha-\beta}{2} + \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha}$

... $\cot \frac{\alpha-\beta}{2} - \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha}$

M) Produkte und Quotienten der Funktionen von der halben Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ und $\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$$\ldots\frac{+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$\ldots\frac{-\beta}{}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$s\frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)$$

$$g\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}$$

$$\frac{-\beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

$$\frac{\beta}{} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$\ldots\frac{\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

9. $$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tang\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tang\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

10. $$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tang\frac{\alpha-\beta}{2}} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

N) Ausdrücke für die Summe der Einheit und dem Produkte zweier *Tangenten*.

Grundform: $1 \mp F(\alpha).F(\beta)$ und $1 - F^2(\alpha).F^2(\beta)$

1. $$1 + \tang\alpha.\tang\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

3. $[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin^2\alpha.\sin 2\beta$

4. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] = 2\sin 2\beta.\cos^2\alpha$

5. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin 2\alpha.\sin^2\beta$

6. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].[\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] = -\cos 2\beta.(1+\sin 2\alpha)$

7. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].[\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \cos 2\alpha(1+\sin 2\beta)$

8. $[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \sin 2\alpha.\sin 2\beta$

9. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha.\cot\beta$

10. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \cot\alpha.\operatorname{tang}\beta$

11. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha.\cot\beta$

12. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta$

13. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha$

14. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\beta$

15. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\beta$

16. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha$

17. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$

18. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

19. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)-\operatorname{tang}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

20. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta).\operatorname{tang}(\alpha-\beta)$

21. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\beta.\cos\beta}.\operatorname{tang}(\beta+\alpha).\operatorname{tang}(\beta-\alpha)$

22. $\dfrac{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = -\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

23. $\dfrac{\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)}{\sec(\alpha+\beta)-\sec(\alpha-\beta)} = \cot\alpha.\cot\beta$

24. $\dfrac{sec\,(\alpha+\beta)+sec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta)+cosec\,(\alpha-\beta)} = cot\,\alpha\,.\,tang\,(\alpha+\beta)\,.\,tang\,(\alpha-\beta)$

25. $\dfrac{sec\,(\alpha+\beta)+sec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta)-cosec\,(\alpha-\beta)} = -\,cot\,\beta\,.\,tang\,(\alpha+\beta)\,.\,tang\,(\alpha-\beta)$

26. $\dfrac{cosec\,(\alpha+\beta)+cosec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta)-cosec\,(\alpha-\beta)} = -\,tang\,\alpha\,.\,cot\,\beta$

27. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,(\alpha-\beta)}\,.\,\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha+\beta)+cos\,(\alpha-\beta)} = tang^2\,\alpha\,.\,cot\,\beta$

28. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,(\alpha-\beta)}\,.\,\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha-\beta)-cos\,(\alpha+\beta)} = tang\,\alpha\,.\,cot^2\,\beta$

29. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta)-sin\,(\alpha-\beta)}\,.\,\dfrac{cos\,(\alpha+\beta)+cos\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha-\beta)-cos\,(\alpha+\beta)} = cot^2\,\beta$

30. $\dfrac{[sin\,(\alpha+\beta)+sin\,(\alpha-\beta)]^2}{cos^2\,(\alpha-\beta)-cos^2\,(\alpha+\beta)} = tang\,\alpha\,.\,cot\,\beta = \dfrac{tang\,\alpha}{tang\,\beta}$

31. $\dfrac{sin^2\,(\alpha+\beta)^2-sin^2\,(\alpha-\beta)}{[cos\,(\alpha+\beta)+cos\,(\alpha-\beta)]^2} = tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

32. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)-sin^2\,(\alpha-\beta)}{cos^2\,(\alpha-\beta)-cos^2\,(\alpha+\beta)} = 1$

K) Quotienten von *Sinus* und *Cosinus* der Summe zweier Bogen, dividirt durch das Produkt derselben.

Grundform: $\dfrac{F\,(\alpha+\beta)}{F\,(\alpha)\,.\,F\,(\beta)}$

1. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = tang\,\alpha + tang\,\beta$

2. $\dfrac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha + cot\,\beta$

3. $\dfrac{sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = tang\,\alpha - tang\,\beta$

4. $\dfrac{sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha - cot\,\beta$

5. $\dfrac{cos\,(\alpha+\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = 1 - tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

6. $\dfrac{cos\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha\,.\,cot\,\beta - 1$

7. $\dfrac{cos\,(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = 1 + tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

3. $[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \,.\, [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2 \sin$

4. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \,.\, [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] = 2 s$

5. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \,.\, [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] =$

6. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \,.\, [\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

7. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \,.\, [\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+$

8. $[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \,.\, [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha$

9. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \tang \alpha \,.\, \cot \beta$

10. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \cot \alpha \,.\, tan$

11. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot \alpha$

12. $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} =$

13. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-}$

14. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha}{\cos(\alpha-\beta)-\cos} \quad + \tang \alpha$

15. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-}{\cos(\alpha+\beta)-}$

16. $\frac{\sin(\alpha+}{\cos(\alpha-}$

17. $\frac{\sin(\alpha}{\sin}$

18. $\frac{\sin}{si}$

...me oder Differenz der *Tangenten* von der halben Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \mp F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

19. $\tang \frac{\alpha+\beta}{2} + \tang \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}$

20. $\tang \frac{\alpha+\beta}{2} - \tang \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$

3. $\cot \frac{\alpha-\beta}{2} + \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha}$

4. $\cot \frac{\alpha-\beta}{2} - \cot \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2 \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha}$

M) Produkte und Quotienten der Funktionen von der halben Summe oder Differenz zweier Bogen.

$$\text{Grundform: } F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{ und } \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}.\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(cos\, \beta - cos\, \alpha)$$

$$\frac{+\beta}{2}.\, cos\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(sin\, \alpha + sin\, \beta)$$

$$\beta.\, cos\, \frac{\alpha+\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(sin\, \alpha - sin\, \beta)$$

$$cos\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \tfrac{1}{2}(cos\, \alpha + cos\, \beta)$$

$$.\, tang\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{cos\, \beta - cos\, \alpha}{cos\, \beta + cos\, \alpha}$$

$$tang\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cot\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{sin\, \alpha + sin\, \beta}{sin\, \alpha - sin\, \beta}$$

7. $$tang\, \frac{\alpha-\beta}{2}.\, cot\, \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{sin\, \alpha - sin\, \beta}{sin\, \alpha + sin\, \beta}$$

8. $$cot\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cot\, \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{cos\, \alpha + cos\, \beta}{cos\, \beta - cos\, \alpha}$$

9. $$\frac{sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cos\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{tang\, \frac{\alpha+\beta}{2}}{tang\, \frac{\alpha-\beta}{2}} = tang\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cot\, \frac{\alpha-\beta}{2}$$

10. $$\frac{cos\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cos\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{cot\, \frac{\alpha+\beta}{2}}{tang\, \frac{\alpha-\beta}{2}} = cot\, \frac{\alpha+\beta}{2}.\, cot\, \frac{\alpha-\beta}{2}$$

N) Ausdrücke für die Summe der Einheit und dem Produkte zweier *Tangenten*.

$$\text{Grundform: } 1 \mp F(\alpha).F(\beta) \text{ und } 1 - F^2(\alpha).F^2(\beta)$$

1. $$1 + tang\, \alpha.\, tang\, \beta = \frac{cos\,(\alpha-\beta)}{cos\, \alpha.\, cos\, \beta}$$

3. $[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin^2\alpha \cdot \sin 2\beta$

4. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] = 2\sin 2\beta \cdot \cos^2\alpha$

5. $[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = 2\sin 2\alpha \cdot \sin^2\beta$

6. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \cdot [\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] = -\cos 2\beta \cdot (1+\sin 2\alpha)$

7. $[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \cdot [\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \cos 2\alpha\,(1+\sin 2\beta)$

8. $[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \cdot [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

9. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\beta$

10. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \cot\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta$

11. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha \cdot \cot\beta$

12. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{tang}\beta$

13. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\alpha$

14. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\beta$

15. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}\beta$

16. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \cot\alpha$

17. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$

18. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

19. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)-\operatorname{tang}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

20. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)} = \operatorname{tang}(\alpha+\beta) \cdot \operatorname{tang}(\alpha-\beta)$

21. $\dfrac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)+\operatorname{tang}(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = \dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\beta \cdot \cos\beta} \cdot \operatorname{tang}(\beta+\alpha) \cdot \operatorname{tang}(\beta-\alpha)$

22. $\dfrac{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\alpha-\beta)}{\cot(\alpha+\beta)-\cot(\alpha-\beta)} = -\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

23. $\dfrac{\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha-\beta)}{\sec(\alpha+\beta)-\sec(\alpha-\beta)} = \cot\alpha \cdot \cot\beta$

24. $\frac{sec\,(\alpha+\beta) + sec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta) + cosec\,(\alpha-\beta)} = cot\,\alpha\,.\,tang\,(\alpha+\beta)\,.\,tang\,(\alpha-\beta)$

25. $\frac{sec\,(\alpha+\beta) + sec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta) - cosec\,(\alpha-\beta)} = -cot\,\beta\,.\,tang\,(\alpha+\beta)\,.\,tang\,(\alpha-\beta)$

26. $\frac{cosec\,(\alpha+\beta) + cosec\,(\alpha-\beta)}{cosec\,(\alpha+\beta) - cosec\,(\alpha-\beta)} = -tang\,\alpha\,.\,cot\,\beta$

27. $\frac{sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta) - sin\,(\alpha-\beta)} \cdot \frac{sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta)} = tang^2\,\alpha\,.\,cot\,\beta$

28. $\frac{sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta) - sin\,(\alpha-\beta)} \cdot \frac{sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha-\beta) - cos\,(\alpha+\beta)} = tang\,\alpha\,.\,cot^2\,\beta$

29. $\frac{sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,(\alpha+\beta) - sin\,(\alpha-\beta)} \cdot \frac{cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta)}{cos\,(\alpha-\beta) - cos\,(\alpha+\beta)} = cot^2\,\beta$

30. $\frac{[sin\,(\alpha+\beta) + sin\,(\alpha-\beta)]^2}{cos^2\,(\alpha-\beta) - cos^2\,(\alpha+\beta)} = tang\,\alpha\,.\,cot\,\beta = \frac{tang\,\alpha}{tang\,\beta}$

31. $\frac{sin^2\,(\alpha+\beta)^2 - sin^2\,(\alpha-\beta)}{[cos\,(\alpha+\beta) + cos\,(\alpha-\beta)]^2} = tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

32. $\frac{sin\,(\alpha+\beta) - sin^2\,(\alpha-\beta)}{cos^2\,(\alpha-\beta) - cos^2\,(\alpha+\beta)} = 1$

K) Quotienten von *Sinus* und *Cosinus* der Summe zweier Bogen, dividirt durch das Produkt derselben.

Grundform: $\frac{F\,(\alpha+\beta)}{F\,(\alpha)\,.\,F\,(\beta)}$

1. $\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = tang\,\alpha + tang\,\beta$

2. $\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha + cot\,\beta$

3. $\frac{sin\,(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = tang\,\alpha - tang\,\beta$

4. $\frac{sin\,(\alpha-\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha - cot\,\beta$

5. $\frac{cos\,(\alpha+\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = 1 - tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

6. $\frac{cos\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta} = cot\,\alpha\,.\,cot\,\beta - 1$

7. $\frac{cos\,(\alpha-\beta)}{cos\,\alpha\,.\,cos\,\beta} = 1 + tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta$

8. $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\sin\beta} = \cot\alpha\,.\,\cot\beta + 1$

9. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,.\,\cos\beta} = 1 + \tan\beta\,.\,\cot\alpha$

10. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,.\,\sin\beta} = 1 + \tan\alpha\,.\,\cot\beta$

11. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\,.\,\cos\beta} = 1 - \tan\beta\,.\,\cot\alpha$

12. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,.\,\sin\beta} = \tan\alpha\,.\,\cot\beta - 1$

13. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,.\,\cos\beta} = \cot\alpha - \tan\beta$

14. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,.\,\sin\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

15. $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha : \cos\beta} = \cot\alpha + \tan\beta$

16. $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\,.\,\sin\beta} = \cot\beta + \tan\alpha$

L) Summe oder Differenz der *Tangenten* von der halben Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \mp F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

1. $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} + \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}$

2. $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} - \tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$

3. $\cot\frac{\alpha-\beta}{2} + \cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}$

4. $\cot\frac{\alpha-\beta}{2} - \cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}$

M) Produkte und Quotienten der Funktionen von der halben Summe oder Differenz zweier Bogen.

Grundform: $F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ und $\dfrac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{F\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).F'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

1. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$

2. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$

3. $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)$

4. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)$

5. $\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}.\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}$

6. $\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$

7. $\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}.\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$

8. $\cot\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$

9. $\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

10. $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \dfrac{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}.\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

N) Ausdrücke für die Summe der Einheit und dem Produkte zweier *Tangenten.*

Grundform: $1 \mp F(\alpha).F(\beta)$ und $1 - F^2(\alpha).F^2(\beta)$

1. $1 + \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$

2. $1 - tang\,\alpha \,.\, tang\,\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}$

3. $1 + \cot\alpha \,.\, \cot\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$

4. $\cot\alpha \,.\, \cot\beta - 1 = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}$

5. $1 + \cot\alpha \,.\, tang\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta} = \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{tang\,\alpha}$

6. $1 - \cot\alpha \,.\, tang\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta} = \frac{tang\,\alpha - tang\,\beta}{tang\,\alpha}$

7. $1 - tang^2\alpha \,.\, tang^2\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) \,.\, \cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}$

8. $\cot^2\alpha \,.\, \cot^2\beta - 1 = \frac{\cos(\alpha+\beta) \,.\, \cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha \,.\, \sin^2\beta}$

9. $1 - tang^2\beta \,.\, tang^2\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\beta}$

10. $tang^2\alpha \,.\, \cot^2\beta - 1 = \frac{\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha \,.\, \sin^2\beta}$

O) Ausdrücke für die Summation der Bogen bei *Tangenten* und *Cotangenten*.

Grundform: $arc\,tang\,x \mp arc\,tang\,y$

1. $arc\,tang\,x = \frac{1}{2}\,arc\,tang\,\frac{2x}{1-x^2}$

2. $ = \frac{1}{2}\,arc\,cot\,\frac{1-x^2}{2x}$

3. $arc\,cot\,x = \frac{1}{2}\,arc\,tang\,\frac{2x}{x^2-1}$

4. $ = \frac{1}{2}\,arc\,cot\,\frac{x^2-1}{2x}$

5. $arc\,tang\,x + arc\,tang\,y = arc\,tang\,\frac{x+y}{1-xy}$

6. $arc\,tang\,x - arc\,tang\,y = arc\,tang\,\frac{x-y}{1+xy}$

7. $\text{arc cot } x + \text{arc cot } y = \text{arc cot } \frac{xy-1}{x+y}$

8. $\text{arc cot } x - \text{arc cot } y = \text{arc cot } \frac{xy+1}{y-x}$

XIV. Werthe der Funktionen für einen aus drei Theilen zusammengesetzten Bogen.

A) Funktionen für unbestimmte Werthe der drei Theile des Bogens.

Grundform: $F(\alpha+\beta+\gamma)$

1. $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\cos\alpha.\cos\gamma + \sin\gamma.\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$

2. $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma - \cos\alpha.\sin\beta.\sin\gamma - \cos\beta.\sin\alpha.\sin\gamma - \cos\gamma.\sin\alpha.\sin\beta$

3. $\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta.\text{tang}\,\gamma}{1 - \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\beta.\text{tang}\,\gamma}$

4. $\cot(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma - \cot\alpha - \cot\beta - \cot\gamma}{\cot\alpha.\cot\beta + \cot\alpha.\cot\gamma + \cot\beta.\cot\gamma - 1}$

5. $\sec(\alpha+\beta+\gamma) =$

$$= \frac{\sec\alpha.\sec\beta.\sec\gamma.\text{cosec}\,\alpha.\text{cosec}\,\beta.\text{cosec}\,\gamma}{\text{cosec}\,\alpha.(\text{cosec}\,\beta.\text{cosec}\,\gamma - \sec\beta.\sec\gamma) - \sec\alpha.(\text{cosec}\,\gamma.\sec\beta - \text{cosec}\,\beta.\sec\gamma)}$$

6. $\text{cosec}(\alpha+\beta+\gamma) =$

$$= \frac{\sec\alpha.\sec\beta.\sec\gamma.\text{cosec}\,\alpha.\text{cosec}\,\beta.\text{cosec}\,\gamma}{\text{cosec}\,\alpha.(\text{cosec}\,\gamma.\sec\beta + \text{cosec}\,\beta.\sec\gamma) + \sec\alpha.(\text{cosec}\,\beta.\text{cosec}\,\gamma - \sec\beta.\sec\gamma)}$$

B) Gleichungen für den Fall, wenn die Summe der drei Bogen 90° beträgt, oder $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$

1. $\sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\cos\alpha.\cos\gamma + \sin\gamma.\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma = 1$
2. $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\gamma = \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta.\text{tang}\,\gamma + \sec\alpha.\sec\beta.\sec\gamma$
3. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha.\cot\beta.\cot\gamma$
4. $\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\gamma + \text{tang}\,\beta.\text{tang}\,\gamma = 1$

C) Gleichungen für den Fall, wenn die Summe der drei Bogen 180° beträgt, oder $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

1. $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma - \cos\beta . \sin\alpha . \sin\gamma - \cos\gamma . \sin\alpha . \sin\beta = 1$
2. $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\gamma = \text{tang}\,\alpha . \text{tang}\,\beta . \text{tang}\,\gamma$
3. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha . \cot\beta . \cot\gamma + \text{cosec}\,\alpha . \text{cosec}\,\beta . \text{cosec}\,\gamma$
4. $\cot\alpha . \cot\beta + \cot\alpha . \cot\beta + \cot\beta . \cot\gamma = 1$
5. $\text{tang}\frac{\alpha}{2} . \text{tang}\frac{\beta}{2} + \text{tang}\frac{\alpha}{2} . \text{tang}\frac{\gamma}{2} + \text{tang}\frac{\beta}{2} . \text{tang}\frac{\gamma}{2} = 1$
6. $\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2} . \cot\frac{\beta}{2} . \cot\frac{\gamma}{2}$

XV. Summenformeln für Reihen von Funktionen, deren Bogen nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten.

A) Summenformeln für die Funktionen von Bogen, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten.

a) Allgemeine Formeln.

aa) Reihe der *Sinus*.

Für eine Reihe von folgender Gestalt:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \sin(\alpha+3\varphi) \ldots + \sin(\alpha+n\varphi)$$

ist die Summe sämmtlicher Glieder ausgedrückt durch:

$$1.\quad S = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n+1}{2} . \varphi\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

oder:

$$2.\quad S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} . \varphi\right) . \sin\left(\alpha + \frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Wird die Anzahl der Glieder unendlich grofs, so entsteht die Summe:

$$3.\quad S = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

Wenn φ ein aliquoter Theil des Kreisumfanges ist, so bleibt die Reihe unbestimmt.

Für die einzelnen Glieder der Reihe ergeben sich folgende Werthe:

$\sin \alpha = \sin \alpha$

$\sin(\alpha + \varphi) = 2 \cos \varphi . \sin \varphi - \sin(\alpha - \varphi)$

$\sin(\alpha + 2\varphi) = 2 \cos \varphi . \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha$

$\sin(\alpha + 3\varphi) = 2 \cos \varphi . \sin(\alpha + 2\varphi) - \sin(\alpha + \varphi)$

$\sin(\alpha + 4\varphi) = 2 \cos \varphi . \sin(\alpha + 3\varphi) - \sin(\alpha + 2\varphi)$ u. s. w.

und allgemein:

$\sin(\alpha + n\varphi) = 2 \cos \varphi . \sin(\alpha + (n-1)\varphi) - \sin(\alpha + (n-2)\varphi)$

oder auch:

$\sin(\alpha + n\varphi) = 2 \sin \varphi . \cos(\alpha + (n-1)\varphi) + \sin(\alpha + (n-2)\varphi)$

bb) Reihe der *Cosinus*.

Für eine Reihe von folgender Gestalt:

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + 2\varphi) + \cos(\alpha + 3\varphi) \ldots . + \cos(\alpha + n\varphi)$$

ist die Summe ausgedrückt durch:

$$1.\quad S = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{2n+1}{2} . \varphi\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

oder:

$$2.\quad S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} . \varphi\right) . \cos\left(\alpha + \frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

Wird die Reihe unendlich, so entsteht:

$$3.\quad S = -\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}\varphi}$$

Die einzelnen Glieder der Reihe erhalten folgende Werthe:

$\cos\alpha = \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\varphi) = 2\cos\varphi \, . \, \cos\alpha - \cos(\alpha-\varphi)$

$\cos(\alpha+2\varphi) = 2\cos\varphi \, . \, \cos(\alpha+\varphi) - \cos\alpha$

$\cos(\alpha+3\varphi) = 2\cos\varphi \, . \, \cos(\alpha+2\varphi) - \cos(\alpha+\varphi)$

$\cos(\alpha+4\varphi) = 2\cos\varphi \, . \, \cos(\alpha+3\varphi) - \cos(\alpha+2\varphi)$ u. s. w.

und allgemein:

$\cos(\alpha+n\varphi) = 2\cos\varphi \, . \, \cos(\alpha+(n-1)\varphi) - \cos(\alpha+(n-2)\varphi)$

oder auch:

$\cos(\alpha+n\varphi) = \cos(\alpha+(n-2)\varphi) - 2\sin\varphi \, . \, \sin(\alpha+(n-2)\varphi)$

b) Summenformeln für besondere, aus arithmetischen Fortschreitungen entstehende Reihen von Bogen.

1. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots\ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha \, . \, \sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$

Wird diese Reihe eine ohne Ende fortlaufende, so ist:

$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\alpha$

2. $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots\ldots \mp \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha \, . \, \cos\frac{1}{2}n\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

Wird diese Reihe eine unendlich fortgesetzte, so ist:

$\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots\ldots = \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\alpha$

3. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots\ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}n\alpha \, . \, \cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$

Wird diese Reihe unendlich fortgesetzt, so ist:

$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots\ldots = -\frac{1}{2}$

4. $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots\ldots \mp \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha \, . \, \cos\frac{1}{2}n\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$

Wird diese Reihe unendlich fortgesetzt, so ist:

$\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots\ldots = \frac{1}{2}$

5. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha + \ldots\ldots \sin n\alpha = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

Wird diese Reihe unendlich, so ist:

$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\alpha$ und

$\sin\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha - \ldots\ldots = 0$

6. $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha \ldots\ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$

Wird diese Reihe unendlich, so ist:

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots\ldots = 0 \text{ und}$$
$$\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}\sec\alpha$$

7. $$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \ldots\ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+2)\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\alpha}$$

8. $$\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \ldots\ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}n\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}(n+2)\alpha}{\sin\alpha}$$

9. $$\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \ldots\ldots + n\,.\,\sin n\alpha =$$
$$= \frac{\sin n\alpha - n\,.\,\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

10. $$\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + 3\cos 3\alpha + \ldots\ldots + n\,.\,\cos n\alpha =$$
$$= \frac{n\,.\,\sin\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin(n+\frac{1}{2})\alpha - \sin^2\frac{1}{2}n\alpha}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

11. $$\sin\alpha\,.\,\sin\beta + \sin 2\alpha\,.\,\sin 2\beta + \sin 3\alpha\,.\,\sin 3\beta + \ldots\ldots + \sin n\alpha\,.\,\sin n\beta =$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha-\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} - \frac{\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha+\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

12. $$\cos\alpha\,.\,\cos\beta + \cos 2\alpha\,.\,\cos 2\beta + \cos 3\alpha\,.\,\cos 3\beta + \ldots\ldots + \cos n\alpha\,.\,\cos n\beta =$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha-\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} + \frac{\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha+\beta)\,.\,\cos\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

13. $$\sin\alpha\,.\,\cos\beta + \sin 2\alpha\,.\,\cos 2\beta + \ldots\ldots + \sin n\alpha\,.\,\cos n\beta =$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha+\beta)\,.\,\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} + \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\,.\,(\alpha-\beta)\,.\,\sin\frac{1}{2}n\,.\,(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

B) Summenformeln für die Potenzen von Bogen, die in arithmetischer Progression stehen.

a) Allgemeine Ausdrücke.

aa) Reihe der *Sinus*.

Für die Summe einer Reihe von folgender Gestalt:

$$\sin^m\alpha + \sin^m(\alpha+\varphi) + \sin^m(\alpha+2\varphi) \ldots\ldots + \sin^m(\alpha+n\varphi)$$

ergiebt sich folgende Formel:

$$S = \frac{\sin\frac{1}{2}m\,.\,(n+1)\varphi\,.\,\sin m\,.\,(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^{m-1}\sin\frac{1}{2}m\varphi} -$$
$$- \frac{m\,.\,\sin\frac{1}{2}(m-2)\,.\,(n+1)\varphi\,.\,\sin(m-2)\,.\,(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^{m-1}\sin\frac{1}{2}(m-2)\varphi} + \cdot$$

$$+\frac{m.(m-1).\sin\frac{1}{2}(m-4).(n+1)\varphi.\sin(m-4).(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^m\sin\frac{1}{2}(m-4)\varphi}-$$

$$-\frac{m.(m-1).(m-2).\sin\frac{1}{2}(m-6).(n+1)\varphi.\sin(m-6).(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{3.2^m\sin\frac{1}{2}(n-6)\varphi}+\ldots\ldots$$

Der ganze Ausdruck ist positiv oder negativ, je nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

bb) Reihe der *Cosinus*.

Für die Summe einer Reihe von folgender Gestalt:

$$\cos^m\alpha+\cos^m(\alpha+\varphi)+\cos^m(\alpha+2\varphi)+\ldots\ldots\cos^m(\alpha+n\varphi)$$

ergiebt sich:

$$S=\frac{\sin\frac{1}{2}m.(n+1)\varphi.\cos m.(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^{m-1}\sin\frac{1}{2}m\varphi}+$$

$$+\frac{m.\sin\frac{1}{2}(m-2).(n+1)\varphi.\cos(m-2).(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^{m-1}\sin\frac{1}{2}(m-2)\varphi}+$$

$$+\frac{m.(m-1).\sin\frac{1}{2}(m-4).(n+1)\varphi.\cos(m-4).(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{2^m\sin\frac{1}{2}(m-4)\varphi}+$$

$$+\frac{m.(m-1).(m-2).\sin\frac{1}{2}(m-6).(n+1)\varphi.\cos(m-6).(\alpha+\frac{1}{2}n\varphi)}{3.2^m\sin\frac{1}{2}(m-6)\varphi}+\ldots\ldots$$

b) Summenformeln für besondere aus den Potenzen der Funktionen zusammengesetzte Reihen.

1. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\ldots.+\sin^2 n\alpha=\frac{1}{2}n-\frac{\sin n\alpha.\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$

2. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\ldots.+\cos^2 n\alpha=\frac{1}{2}n+\frac{\sin n\alpha.\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$

3. $\sin^2.\cos\alpha+\sin^2 2\alpha.\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha.\cos 3\alpha+\ldots..+\sin^2 n\alpha.\cos\alpha=$
$=\frac{\sin\frac{1}{2}n\alpha.\cos(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha}-\frac{\sin\frac{3}{2}n\alpha.\cos\frac{3}{2}(n+1)\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$

4. $\sin\alpha.\cos^2\alpha+\sin 2\alpha.\cos^2 2\alpha+\sin 3\alpha.\cos^2 3\alpha+\ldots.+\sin n\alpha.\cos^2 n\alpha=$
$=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha}+\frac{\sin\frac{3}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{3}{2}n\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$

5. $\sin^2\alpha.\cos^2\alpha+\sin^2 2\alpha.\cos^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha.\cos^2 3\alpha+\ldots.\sin^2 n\alpha.\cos^2 n\alpha=$
$=\frac{n}{8}-\frac{\sin 2n\alpha.\cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha}$

6. $\sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \sin^3 3\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha = \frac{3\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}n\alpha}{4\sin\frac{1}{2}n\alpha} -$
$- \frac{\sin\frac{3}{2}(n+1)\alpha \,.\, \sin\frac{3}{2}n\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$

7. $\cos^3\alpha + \cos^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \ldots + \cos^3 n\alpha = \frac{3\sin\frac{1}{2}n\alpha \,.\, \cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}n\alpha} +$
$+ \frac{\sin\frac{3}{2}n\alpha \,.\, \cos\frac{3}{2}(n+1)\alpha}{4\sin\frac{3}{2}\alpha}$

8. $\sin^3\alpha \,.\, \cos\alpha + \sin^3 2\alpha \,.\, \cos 2\alpha \,.\, + \sin^3 3\alpha \,.\, \cos 3\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha \,.\, \cos n\alpha =$
$= \frac{\sin(n+1)\alpha \,.\, \sin n\alpha}{4\sin\alpha} - \frac{\sin 2(n+1)\alpha \,.\, \sin 2n\alpha}{8\sin 2\alpha}$

9. $siu\,\alpha \,.\, \cos^3\alpha + \sin 2\alpha \,.\, \cos^3 2\alpha + \sin 3\alpha \,.\, \cos^3 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha \,.\, \cos^3 n\alpha =$
$= \frac{\sin 2(n+1)\alpha \,.\, \sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha \,.\, \sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$

10. $\sin^3\alpha \,.\, \cos^3\alpha + \sin^3 2\alpha \,.\, \cos^3 2\alpha + \sin^3 3\alpha \,.\, \cos^3 3\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha \,.\, \cos^3 n\alpha =$
$= \frac{3\sin(n+1)\alpha \,.\, \sin n\alpha}{32\sin\alpha} - \frac{\sin 3(n+1)\alpha \,.\, \sin 3n\alpha}{32\sin 3\alpha}$

11. $\sin^4\alpha + \sin^4 2\alpha + \sin^4 3\alpha + \ldots + \sin^4 n\alpha = \frac{\sin 2n\alpha \,.\, \cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha} -$
$- \frac{\sin n\alpha \,.\, \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3n}{8}$

12. $\cos^4\alpha + \cos^4 2\alpha + \cos^4 3\alpha + \ldots + \cos^4 n\alpha = \frac{\sin n\alpha \,.\, \cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha} +$
$+ \frac{\sin n\alpha \,.\, \cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{3n}{8}$

XVI. Reihen für die Bogen und die trigonometrischen Funktionen, und für die Logarithmen dieser Funktionen.

A) Reihen für Kreisbogen, dargestellt durch die zu diesen Bogen gehörigen trigonometrischen Funktionen.

1. $\mathrm{arc}\,\alpha = \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{1.2.3} + \frac{1.3.\sin^5\alpha}{1.2.4.5} + \frac{1.3.5.\sin^7\alpha}{1.2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.\sin^9\alpha}{1.2.4.6.8.9} + \ldots\ldots$

2. $arc\,\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{1.2.3} + \frac{1.3.\cos^5\alpha}{1.2.4.5} + \frac{1.3.5.\cos^7\alpha}{1.2.4.6.7} + \ldots\right) =$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{1} + \frac{1-\cos^3\alpha}{2.3} + \frac{3.(1-\cos^5\alpha)}{2.4.5} - \frac{3.5.(1-\cos^7\alpha)}{2.4.6.7} + \ldots$$

3. $arc\,\alpha = tang\,\alpha - \frac{1}{3}.tang^3\alpha + \frac{1}{5}.tang^5\alpha - \frac{1}{7}.tang^7\alpha + \frac{1}{9}.tang^9\alpha - \ldots$

4. $arc\,\alpha = \frac{\pi}{2} - (\cot\alpha - \frac{1}{3}.\cot^3\alpha + \frac{1}{5}.\cot^5\alpha - \frac{1}{7}.\cot^7\alpha + \ldots) =$

$$= \frac{1}{\cot\alpha} - \frac{1}{3\cot^3\alpha} + \frac{1}{5\cot^5\alpha} - \frac{1}{7\cot^7\alpha} + \frac{1}{9\cot^9\alpha} - \frac{1}{11\cot^{11}\alpha} + \ldots$$

5. $arc\,\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{\sec\alpha} + \frac{1}{2.3.\sec^3\alpha} + \frac{3}{2.4.5.\sec^5\alpha} + \frac{3.5}{2.4.6.7.\sec^7\alpha} + \ldots\right) =$

$$= \frac{\sec\alpha - 1}{\sec\alpha} + \frac{\sec^3\alpha - 1}{2.3.\sec^3\alpha} + \frac{3.(\sec^5\alpha - 1)}{2.4.5.\sec^5\alpha} + \frac{3.5.(\sec^7\alpha - 1)}{2.4.6.7.\sec^7\alpha} + \ldots$$

6. $arc\,\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha} + \frac{1}{2.3.cosec^3\alpha} + \frac{3}{2.4.5.cosec^5\alpha} + \frac{3.5}{2.4.6.7.cosec^7\alpha} + \ldots$

Zusatz. Durch die *Sinus* der vielfachen Bogen, entsteht folgender merkwürdiger Ausdruck für den Bogen:

$$\tfrac{1}{2}.arc\,\alpha = \tfrac{1}{1}.\sin\alpha - \tfrac{1}{2}.\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}.\sin 3\alpha - \tfrac{1}{4}.\sin 4\alpha + \ldots$$

(Siehe *Lacroix Calc. differ. p.* 75.)

B) Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen.

a) Durch Reihen der dazu gehörigen Kreisbogen.

1. $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1\ldots\ldots7} + \frac{\alpha^9}{1\ldots\ldots9} - \ldots\ldots =$

$$= \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5 - \frac{1}{5040}\alpha^7 + \frac{1}{362880}\alpha^9 - \frac{1}{39916100}\alpha^9 + \ldots\ldots$$

2. $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1\ldots\ldots8} - \ldots\ldots =$

$$= 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6 + \frac{1}{40320}\alpha^8 - \frac{1}{3628800}\alpha^{10} +$$

$$+ \frac{1}{479001600}\alpha^{12} - \ldots\ldots$$

3. $tang\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{3.5} + \frac{17\alpha^7}{3^2.5.7} + \frac{62\alpha^9}{3^2.5.7.9} + \frac{1382\alpha^{11}}{3^2.5.7.9.11} +$

$$+ \frac{21844\alpha^{13}}{3.5^2.7.9^2.11.13} + \frac{929569\alpha^{15}}{3^3.5^2.7^2.9.11.13.15} + \ldots\ldots =$$

$$= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \frac{17}{315}\alpha^7 + \frac{62}{2835}\alpha^9 + \frac{1382}{155925}\alpha^{11} + \ldots\ldots$$

4. $\cot\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{3^2.5} - \frac{2\alpha^5}{3^3.5.7} - \frac{\alpha^7}{3^3.5^2.7} - \frac{2\alpha^9}{3^3.5.7.9.11} - \frac{1382\,\alpha^{11}}{3^4.5^3.7^2.9.11.13} -$

$$- \frac{4\alpha^{13}}{3^4.5^2.7.9.11.13} - \frac{3617\,\alpha^{15}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13.15.17} - \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{45}\alpha^3 - \frac{2}{945}\alpha^5 - \frac{1}{4725}\alpha^7 - \frac{2}{31185}\alpha^9 - \ldots\ldots$$

5. $\sec\alpha = 1 + \frac{1}{1.2}\alpha^2 + \frac{5}{1.2.3.4}\alpha^4 + \frac{61}{1.2.3.4.5.6}\alpha^6 + \frac{1385}{1.2.3.4.5.6.7.8}\alpha^8 +$

$$+ \frac{50511}{1.2\ldots\ldots10}\alpha^{10} + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{5}{24}\alpha^4 + \frac{61}{720}\alpha^6 + \frac{277}{8064}\alpha^8 + \ldots\ldots$$

6. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1.2.3}\alpha + \frac{7}{3.4.5.6}\alpha^3 + \frac{31}{3.4.5.6^2.7}\alpha^5 +$

$$+ \frac{127}{2.3.4.5^2.6^2.7.8.9}\alpha^7 + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{6}\alpha + \frac{7}{360}\alpha^3 + \frac{31}{15120}\alpha^5 + \ldots\ldots$$

Zusatz. Das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten in den Reihen für die *Tangente, Cotangente, Secante* und *Cosecante* fortschreiten, kann aus den angegebenen Gliedern nicht unmittelbar erkannt werden. Um die Art, wie diese Koeffizienten von einander abhängen, deutlich zu machen, denke man sich die 6 Reihen unter folgender allgemeinen Gestalt:

1. $\sin\alpha = \alpha - b\alpha^3 + c\alpha^5 - d\alpha^7 + e\alpha^9 - f\alpha^{11} + \ldots.$
2. $\cos\alpha = 1 - \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^4 - \delta\alpha^6 + \varepsilon\alpha^8 - \zeta\alpha^{10} + \ldots.$
3. $\tan\alpha = \alpha + B\alpha^3 + C\alpha^5 + D\alpha^7 + E\alpha^9 + F\alpha^{11} + \ldots.$
4. $\cot\alpha = \frac{1}{\alpha} + B'\alpha + C'\alpha^3 + D'\alpha^5 + E'\alpha^7 + F'\alpha^9 + \ldots.$
5. $\sec\alpha = 1 + B''\alpha^2 + C''\alpha^4 + D''\alpha^6 + E''\alpha^8 + F''\alpha^{10} + \ldots.$
6. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\alpha} + B'''\alpha + C'''\alpha^3 + D'''\alpha^5 + E'''\alpha^7 + F'''\alpha^9 + \ldots.$

So finden folgende Gleichungen für die Koeffizienten der Reihen 3—6 statt, in welchen diese Koeffizienten durch die aus den Reihen für *Sinus* und *Cosinus* bekannten, leicht gefunden werden.

Koeffizienten für die Reihe der *Tangente.*

1. $B = \beta - b$
2. $C = -\gamma + c + \beta B$
3. $D = \delta - d + \beta C - \gamma B$
4. $E = -\varepsilon + e + \beta D - \gamma C + \delta B$
5. $F = \zeta - f + \beta E - \gamma D + \delta C - \varepsilon B$
6. $G = -\eta + g + \beta F - \gamma E + \delta D - \varepsilon C + \zeta B$
7. $H = \vartheta - h + \beta G - \gamma F + \delta E - \varepsilon D + \zeta C - \eta B$ u. s. w.

Koeffizienten für die Reihe der *Cotangente.*

1. $B' = b - \beta$
2. $C' = -c + \gamma + bB$
3. $D' = d - \delta + bC - cB$
4. $E' = -e + \varepsilon + bD - cC + dB$
5. $F' = f - \zeta + bE - cD + dC - eB$
6. $G' = -g + \eta + bF - cE + dD - eC + fB$ u. s. w.

Koeffizienten für die Reihe der *Secante.*

1. $B'' = \beta$
2. $C'' = \beta B'' - \gamma$
3. $D'' = \beta C'' - \gamma B'' + \delta$
4. $E'' = \beta D'' - \gamma C'' + \delta B'' - \varepsilon$
5. $F'' = \beta E'' - \gamma D'' + \delta C'' - \varepsilon B'' + \zeta$ u. s. w.

Koeffizienten für die Reihe der *Cosecante.*

1. $B''' = b$
2. $C''' = bB''' - c$
3. $D''' = bC''' - cB''' + d$
4. $E''' = bD''' - cC''' + dB''' - e$
5. $F''' = bE''' - cD''' + dC''' - eB''' + f$ u. s. w.

Das Gesetz für die Bildung der Koeffizienten ist hier durch die Art, wie die einzelnen Faktoren in jeder Verticalcolumne fortschreiten, deutlich zu erkennen.

b) Hülfstafeln zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen aus ihren Reihen.

Bei Berechnung einer trigonometrischen Funktion, durch die angeführten Reihen, bediene man sich folgender Hülfsausdrücke. Es wird hierbei angenommen, dafs $\alpha = \frac{m}{n} . 90^\circ$, oder dafs $\alpha = \frac{m}{n} . \frac{\pi}{2}$

Hiernach wird $\sin \alpha = \sin\left(\frac{m}{n} . \frac{\pi}{2}\right) =$

$$+\frac{m}{n} . 1{,}5707963267948966192313216916$$
$$-\frac{m^3}{n^3} . 0{,}6459640975062462536557565636$$
$$+\frac{m^5}{n^5} . 0{,}0796926262461670451205055488$$
$$-\frac{m^7}{n^7} . 0{,}0046817541353186881006854632$$
$$+\frac{m^9}{n^9} . 0{,}0001604411847873598218726605$$
$$-\frac{m^{11}}{n^{11}} . 0{,}0000035988432352120853404580$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}} . 0{,}0000000569217292196792681171$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}} . 0{,}0000000006688035109811467224$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}} . 0{,}0000000000060669357311061950$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}} . 0{,}0000000000000437706546731370$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}} . 0{,}0000000000000002571422892856$$
$$-\frac{m^{23}}{n^{23}} . 0{,}0000000000000000012538995403$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}} . 0{,}0000000000000000000051564550$$
$$-\frac{m^{27}}{n^{27}} . 0{,}0000000000000000000000181239$$
$$+\frac{m^{29}}{n^{29}} . 0{,}0000000000000000000000000549$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad 1{,}0000000000000000000000000000 \\
&- \frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}2337005501361698273543113745 \\
&+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}2536695079010480136365633659 \\
&- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}0208634807633529608730516364 \\
&+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}0009192602748394265802417158 \\
&- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}0000252020423730606054810526 \\
&+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}0000004710874778818171503665 \\
&- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}0000000063866030837918522408 \\
&+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}0000000000656596311497947230 \\
&- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}0000000000005294400200734620 \\
&+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}0000000000000034377391790981 \\
&- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}0000000000000000183599165212 \\
&+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}0000000000000000000820675327 \\
&- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}0000000000000000000003115285 \\
&+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}0000000000000000000000010165 \\
&- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000026
\end{aligned}$$

$\tan\alpha = \tan\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$	$\cot\alpha = \cot\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$
$+\frac{2mn}{nn-mm}\cdot 0{,}6366197723675$	$+\frac{n}{m}\cdot 0{,}6366197723675$
$+\frac{m}{n}\cdot 0{,}2975567820597$	$\frac{-4mn}{4nn-mm}\cdot 0{,}3183098861837$
$+\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}0186886502773$	$-\frac{m}{n}\cdot 0{,}2052888894145$
$+\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}0018424752034$	$-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}0065510747882$
$+\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}0001975800714$	$-\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}0003450292554$
$+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}0000216977245$	$-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}0000202791060$
$+\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}0000024011370$	$-\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}0000012366527$
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000002664132$	$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}0000000764959$
$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000295864$	$-\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}0000000047597$
$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000032867$	$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}0000000002969$
$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000003651$	$-\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}0000000000185$
$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0{,}0000000000405$	$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}0000000000011$

c) Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen durch Faktoren dargestellt.

Nimmt man, wie schon früher geschehen, statt des Bogens selbst, sein Verhältniſs zum Quadranten, welches durch $\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ vorgestellt sein mag, so ist:

1. $\sin\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\ldots$

oder: $= \frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\cdot\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\cdot\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\cdot\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\cdot\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\ldots$

2. $\cos\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right)\ldots.$

oder: $= \left(\frac{n-m}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+m}{n}\right)\cdot\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\cdot\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\cdot\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\ldots.$

3. $\tan\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \left(\frac{m}{n-m}\right)\cdot\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\cdot\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\cdot\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\cdot\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdot$

$\cdot\left(\frac{6n-m}{5n+m}\right)\ldots.$

4. $\cot\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \left(\frac{n-m}{m}\right)\cdot\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\cdot\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\cdot\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\cdot\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\ldots.$

5. $\sec\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+m}\right)\cdot\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\cdot\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\cdot\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\ldots.$

6. $\operatorname{cosec}\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\cdot\left(\frac{n}{2n-m}\right)\cdot\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\cdot\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\cdot\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\ldots.$

d) Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen durch Reihen der anderen Funktionen.

aa) Reihen für den *Sinus*.

1. $\sin\alpha = 1-\frac{1}{2}\cdot\cos^2\alpha-\frac{1}{2.4}\cdot\cos^4\alpha-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\cos^6\alpha-\ldots.$

2. $= \tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\tan^3\alpha+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tan^5\alpha-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tan^7\alpha+\ldots.$

3. $= 1-\frac{1}{2}\cdot\cot^2\alpha+\frac{1.3}{2.4}\cdot\cot^4\alpha-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\cot^6\alpha+\ldots.$

4. $= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\alpha}-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{\sec^4\alpha}-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\sec^6\alpha}-\ldots.$

bb) Reihen für den *Cosinus*.

5. $\cos\alpha = 1-\frac{1}{2}\cdot\sin^2\alpha-\frac{1}{2.4}\cdot\sin^4\alpha-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\sin^6\alpha-\ldots.$

6. $= 1-\frac{1}{2}\cdot\tan^2\alpha+\frac{1.3}{2.4}\cdot\tan^4\alpha-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tan^6\alpha+\ldots.$

7. $= \cot\alpha-\frac{1}{2}\cdot\cot^3\alpha+\frac{1.3}{2.4}\cdot\cot^5\alpha-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\cot^7\alpha+\ldots.$

8. $= 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha}-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^4\alpha}-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\operatorname{cosec}^6\alpha}-\ldots.$

cc) Reihen für die *Tangente.*

$$9.\quad tang\,\alpha = sin\,\alpha + \frac{1}{2}\cdot sin^3\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cdot sin^5\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot sin^7\alpha + \ldots.$$

$$10.\quad = \frac{1}{cos\,\alpha}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot cos^2\alpha - \frac{1}{2.4}\cdot cos^4\alpha - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot cos^6\alpha - \ldots.\right)$$

$$11.\quad = sec\,\alpha\,.\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sec^2\alpha} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{sec^4\alpha} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{sec^6\alpha} - \ldots.\right)$$

$$12.\quad = \frac{1}{cosec\,\alpha}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{cosec^2\alpha} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{cosec^4\alpha} + \ldots.\right)$$

dd) Reihen für die *Cotangente.*

$$13.\quad cot\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot sin^2\alpha - \frac{1}{2.4}\cdot sin^4\alpha - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot sin^6\alpha - \ldots.\right)$$

$$14.\quad = cos\,\alpha + \frac{1}{2}\cdot cos^3\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cdot cos^5\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot cos^7\alpha + \ldots.$$

$$15.\quad = \frac{1}{sec\,\alpha}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sec^2\alpha} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{sec^4\alpha} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{sec^6\alpha} + \ldots.\right)$$

$$16.\quad = cosec\,\alpha\,.\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{cosec^2\alpha} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{cosec^4\alpha} - \ldots.\right)$$

ee) Reihen für die *Secante.*

$$17.\quad sec\,\alpha = 1 + \frac{1}{2}\cdot sin^2\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cdot sin^4\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot sin^6\alpha + \ldots.$$

$$18.\quad = 1 + \frac{1}{2}\cdot tang^2\alpha - \frac{1}{2.4}\cdot tang^4\alpha + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot tang^6\alpha - \ldots.$$

$$19.\quad = \frac{1}{cot\,\alpha}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot cot^2\alpha - \frac{1}{2.4}\cdot cot^4\alpha + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot cot^6\alpha - \ldots.\right)$$

$$20.\quad = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{cosec^2\alpha} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{cosec^4\alpha} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{cosec^6\alpha} + \ldots.$$

ff) Reihen für die *Cosecante.*

$$21.\quad cosec\,\alpha = 1 + \frac{1}{2}\cdot cos^2\alpha + \frac{1.3}{2.4}\cdot cos^4\alpha + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot cos^6\alpha + \ldots.$$

$$22.\quad = \frac{1}{tang\,\alpha}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot tang^2\alpha - \frac{1}{2.4}\cdot tang^4\alpha + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot tang^6\alpha + \ldots.\right)$$

23. $cosec\,\alpha = 1 + \frac{1}{2} \cdot cot^2\alpha - \frac{1}{2.4} \cdot cot^4\alpha + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot cot^6\alpha - \ldots$

24. $\quad = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{sec^2\alpha} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{sec^4\alpha} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{sec^6\alpha} + \ldots$

Anmerkung. Weitere Formeln dieser Art giebt eine Abhandlung von *Jeaurat (Memoires presentés à l'acad. des Sc. de Paris T. IV. pag.* 527 — 31), so wie auch Schweins Geometrie zweiter Theil 196 — 212.

C) Reihen für die *Sinus* und *Cosinus* der Summe oder Differenz zweier Bogen, durch die Bogen und Funktionen der einzelnen Winkel dargestellt.

1. $sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha + \frac{\beta \cdot cos\,\alpha}{1} - \frac{\beta^2 \cdot sin\,\alpha}{1.2} - \frac{\beta^3 \cdot cos\,\alpha}{1.2.3} + \frac{\beta^4 \cdot sin\,\alpha}{1.2.3.4} + - - + + \ldots$

2. $sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha - \frac{\beta \cdot cos\,\alpha}{1} - \frac{\beta^2 \cdot sin\,\alpha}{1.2} + \frac{\beta^3 \cdot cos\,\alpha}{1.2.3} + \frac{\beta^4 \cdot sin\,\alpha}{1.2.3.4} - - + + \ldots$

3. $cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha - \frac{\beta \cdot sin\,\alpha}{1} - \frac{\beta^2 \cdot cos\,\alpha}{1.2} + \frac{\beta^3 \cdot sin\,\alpha}{1.2.3} + \frac{\beta^4 \cdot cos\,\alpha}{1.2.3.4} - - + + \ldots$

4. $cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha + \frac{\beta \cdot sin\,\alpha}{1} - \frac{\beta^2 \cdot cos\,\alpha}{1.2} - \frac{\beta^3 \cdot sin\,\alpha}{1.2.3} + \frac{\beta^4 \cdot cos\,\alpha}{1.2.3.4} + - - + + \ldots$

D) Ausdrücke für die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

a) Durch Reihen dargestellt.

1. $$log\,sin\,\alpha = log\,\alpha - M.\Big(\frac{\alpha^2}{2.3} + \frac{\alpha^4}{2^2.3^2.5} + \frac{\alpha^6}{3^4.5.7.9} + \frac{\alpha^8}{3^3.5^2.7.8} + \frac{\alpha^{10}}{3^3.5^2.7.9.11} + \frac{691\,\alpha^{12}}{3^3.5^3.6.7^2.9^2.11.13} + \frac{2\alpha^{14}}{3^2.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{3617\,\alpha^{16}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13.15.16.17} + \ldots\Big)$$

2. $$log\,cos\,\alpha = log\,\alpha - M.\Big(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{3.4} + \frac{\alpha^6}{5.9} + \frac{17\,\alpha^8}{5.7.8.9} + \frac{31\,\alpha^{10}}{5^2.7.9^2} + \frac{691\,\alpha^{12}}{5^2.6.7.9^2.11} + \frac{10922\,\alpha^{14}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{929569\,\alpha^{16}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13.15.16} + \ldots\Big)$$

3. $$log\,tang\,\alpha = log\,\alpha + M.\Big(\frac{\alpha^2}{3} + \frac{7\,\alpha^4}{9.10} + \frac{62\alpha^6}{5.7.9^2} + \frac{127\,\alpha^8}{3.4.5^2.7.9} + \frac{146\,\alpha^{10}}{3.5^2.9^2.11} + \frac{1414477\,\alpha^{12}}{3^3.5^3.7^2.9^2.11.13} + \frac{32764\,\alpha^{14}}{3^2.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{16931177\,\alpha^{16}}{2.3^2.5^3.7.9^2.11.13.15.17} + \ldots\Big)$$

Anmerkung. $M = 0{,}43429448190325182765112891890\ldots$ ist der Modul der gemeinen Logarithmen; bleibt dieser aus den Formeln weg, so erhält man die hyperbolischen Logarithmen der Funktionen.

b) Ausdrücke für Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, hergeleitet aus den Faktoren für die Werthe der Funktionen selbst. (siehe B. C.)

1. $$\log \sin \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \log m + \log(2n - m) + \log(2n + m) - 3 \log n + \log \pi - \log \gamma -$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^4}{2n^4} \cdot \left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^6}{3n^6} \cdot \left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) - \ldots$$

2. $$\log \cos \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \log(n - m) + \log(n + m) - 2 \log n -$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot (A - 1) - \frac{m^4}{2n^4} \cdot (B - 1) - \frac{m^6}{3n^6} \cdot (C - 1) - \ldots$$

Die Werthe für α, β, γ, $\delta \ldots$, in dem Logarithmus für den *Sinus*, werden durch folgende Reihen dargestellt:

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots \qquad \beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \ldots$$
$$\gamma = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \ldots \qquad \delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Die Werthe für die Gröfsen A, B, C, D ...., in dem Logarithmus des *Cosinus,* werden durch folgende Reihen dargestellt:

$$A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots \qquad B = \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots$$
$$C = \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots \qquad D = \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots \text{ u. s. w.}$$

c) Hülfstafeln für den Gebrauch dieser Reihen.

In folgenden Tafeln sind sämmtliche constante Gröfsen der beiden Ausdrücke für die Logarithmen der *Sinus* und *Cosinus,* so zusammengestellt, wie sie in den Grundformeln als Faktoren einer und derselben Potenz von $\frac{m}{n}$ vorkommen. Man hat also, um für einen bestimmten Werth von $\frac{m}{n}$, den Logarithmus des entsprechenden *Sinus* oder *Cosinus* zu finden, nur nöthig, den Werth von $\frac{m}{n}$, in der angedeuteten Potenz, als Faktor einzuführen. Die beiden ersten Tafeln geben diese constanten Faktoren des *Sinus* und *Cosinus* für die hyperbolischen Logarithmen *(log. nat.),* und die beiden letzten Tafeln geben diese Faktoren für die Briggischen Logarithmen *(log. vulg.).*

aa) Hülfstafel zur Auffindung des hyperbolischen Logarithmus von dem *Sinus* des Bogens $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$log.\,nat.\ sin\,\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = log\,m + log\,(2n - m) + log\,(2n + m) - 3\,log\,n$$

$$- \quad 0{,}93471165583043575410$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}16123351671205660911$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00257260105347306848$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00009032844783567260$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00000398179316205501$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00000019425295465196$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000001001328748812$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000000053404135618$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000002914859658$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000000161797979$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000000009097690$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}00000000000000516827$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}00000000000000029607$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}00000000000000001708$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}00000000000000000099$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}00000000000000000005$$

bb) **Hülfstafel zur Auffindung des hyperbolischen Logarithmus von dem *Cosinus* des Bogens** $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\textit{log. nat. cos}\,\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2} = \textit{log}\,(n-m) + \textit{log}\,(n+m) - 2\,\textit{log}\,n$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}23370055013616982735$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00733901580209602727$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00048235888031404063$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00003879475632402982$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00000340827260896510$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000031430809718659$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000002989150274450$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000290464467239$$

$$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000028682639518$$

$$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000002868076974$$

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}00000000000289697956$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}00000000000029506024$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}00000000000003026249$$

$$-\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}00000000000000312232$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}00000000000000032379$$

cc) Hülfstafel zur Auffindung des Briggischen Logarithmus von dem *Sinus* eines Bogens $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$log.\ vulg.\ sin \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = log\, m + log\,(2n - m) + log\,(2n + m) - 3\, log\, n$$

$$+ \quad 9,5940598857021902 6861$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0700228266059019 2014$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0011172664416618 4613$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0000392291464539 1834$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000017292707983 6059$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000000843629862 9875$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000000043487155 0180$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000002319312 1410$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000000126590 7465$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000007026 7969$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000000395 1077$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000000022 4455$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000001 2858$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000000 0738$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000000 0043$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,0000000000000000 0002$$

dd) Hülfstafel zur Aufsuchung des Briggischen Logarithmus von dem *Cosinus* eines Bogens $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$log.\ vulg.\ cos \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = log\,(n-m) + log\,(n+m) - 2\,log\,n$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0{,}10149485934189280353$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}00318729406545107231$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}00020948580001741893$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00001684834859830743$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00000148019398689554$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000013650227222565$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000001298171473773$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000126147115311$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000012456712069$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000001245590006$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}00000000000125814224$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}00000000000012814304$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}00000000000001314283$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}00000000000000135726$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}00000000000000014062$$

d) Reihen für die Logarithmen der *Sinus* und *Cosinus* der Summe oder Differenz zweier Bogen.

1. $$log\, sin\,(\alpha \mp \beta) = log\, sin\, \alpha \mp M . \left[\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} . \beta \pm \frac{1}{2\, sin^2\alpha} . \beta^2 \pm \frac{cos\,\alpha}{3\, sin^3\alpha} . \beta^3 \pm \pm \frac{1 + 2\, cos^2\alpha}{12\, sin^4\alpha} . \beta^4 \pm \ldots\right]$$

2. $$log\, cos\,(\alpha \mp \beta) = log\, cos\, \alpha \pm M . \left[\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} . \beta \mp \frac{1}{2\, cos^2\alpha} . \beta^2 + \frac{sin\,\alpha}{3\, cos^3\alpha} . \beta^3 \mp \mp \frac{1 + 2\, sin^2\alpha}{12\, cos^2\alpha} . \beta^4 + \ldots\right]$$

XVII. Reihen für das Verhältnifs des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange, und für den Logarithmus dieses Verhältnisses.

---

a) Reihen für π, wobei der Durchmesser des entsprechenden Kreises $= 1$ angenommen ist.

1. π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 26136 ....
2. *log nat* π = 1,14472 98858 49400 17414 342
3. *log vulg* π = 0,49714 98726 94133 85435 126

Anmerkung. Ueber die Annäherungswerthe in kleineren Zahlen, und alle auf die Kreisrechnung sich beziehende sonstige Formeln und Hülfszahlen, siehe 1ste Abtheilung, 1ster Abschnitt, VII. A. a.

Reihe von Mechin.

1. $$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \ldots\right)$$

Von allen Reihen für π diejenige, die am schnellsten convergirt. Sie entsteht aus der trigonometrischen Gleichung:

$$arc\, 45^\circ = 4\, arc\, tang\, \frac{1}{5} - arc\, tang\, \frac{1}{239}$$

Reihe von Leibnitz.

2. $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right)$ oder in einer anderen Gestalt:

$$= 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots\right)$$

Reihe von Newton.

3. $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3.3} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9.3^4} - \ldots$ oder in einer anderen Gestalt:

$$= \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{1.3} + \frac{2}{5.7.9^1} + \frac{3}{9.11.9^2} + \frac{4}{13.15.9^3} + \frac{5}{17.19.9^4} + \ldots\right).\sqrt{12}$$

Reihe von Euler.

$$4.\quad \pi = 4\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \ldots \\ \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \ldots\end{array}\right\}$$

diese Reihe entsteht aus der trigonometrischen Gleichung:

$$arc\ tang\ 45^\circ = arc\ tang\ \frac{1}{2} + arc\ tang\ \frac{1}{3}$$

5. $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{1} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{7} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \ldots$

6. $\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{7} - \frac{2\sqrt{3}}{11} + \frac{2\sqrt{3}}{13} - \frac{2\sqrt{3}}{17} + \frac{2\sqrt{3}}{19} - \ldots$

7. $\frac{\pi^2}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \ldots$

diese Reihe hat zu Nennern die Quadrate aller ungeraden Zahlen, welche nicht durch 3 theilbar sind.

Reihe von Wallis.

8. $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}$

9. $\pi = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\ldots\right)$

$$10.\quad \pi = 2\left\{\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots}\right\}$$

$$11.\quad \pi = 4\left\{\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\ldots}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots}\right\}$$

$$12.\quad \pi = 3\left\{\frac{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\ldots}{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\ldots}\right\}$$

$$13.\quad \pi = 16.\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^1}+\frac{2}{5.7.3^3}+\frac{3}{9.11.3^5}+\frac{4}{13.15.3^7}+\ldots\right)$$

Reihen von Vega.

$$14.\quad \pi = 8\left\{\begin{array}{l}\frac{26}{3.3^3}+\frac{58}{5.7.3^7}+\frac{90}{9.11.3^{11}}+\frac{122}{13.15.3^{15}}+\frac{154}{17.19.3^{19}}+\ldots\\ \frac{73}{3.7^3}+\frac{169}{5.7.7^7}+\frac{265}{9.11.7^{11}}+\frac{361}{13.15.7^{15}}+\frac{457}{17.19.3^{19}}+\ldots\end{array}\right\}$$

dieselbe Reihe in einer anderen Gestalt:

$$15.\quad \pi = 4\left\{\begin{array}{l}2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\ldots\right)\\ +\frac{1}{7}-\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}-\frac{1}{7.7^7}+\frac{1}{9.7^9}-\ldots\end{array}\right\}$$

beide Reihen entstehen aus der trigonometrischen Gleichung:

$$arc\ 45^\circ = arc\ tang\,\frac{1}{7}+2\ arc\ tang\,\frac{1}{3}$$

$$16.\quad \pi = 4\left\{\begin{array}{l}5\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}-\frac{1}{7.7^7}+\frac{1}{11.7^{11}}+\ldots\right)\\ +2\left(\frac{3}{79}-\frac{3^3}{3.79^3}+\frac{3^5}{5.79^5}-\frac{3^7}{7.79^7}+\frac{3^9}{9.79^9}-\ldots\right)\end{array}\right\}$$

diese Reihe entsteht aus der trigonometrischen Gleichung:

$$arc\ 45^\circ = 5\ arc\ tang\,\frac{1}{7}+2\ arc\ tang\,\frac{3}{79}$$

$$17.\quad \pi = 12\left(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{3.4^3}+\frac{1}{5.4^5}-\frac{1}{7.4^7}+\ldots\right)$$
$$+4\left(\frac{5}{1.99}-\frac{5^3}{3.99^3}+\frac{5^5}{5.99^5}-\frac{5^7}{7.99^7}+\ldots\right)$$



18. $\pi = 8\left(\frac{4}{1.10} - \frac{4^3}{3.10^3} + \frac{4^5}{5.10^5} - \frac{4^7}{7.10^7} + \ldots\right)$
$+ 4\left(\frac{1}{1.41} - \frac{1}{3.41^3} + \frac{1}{5.41^5} - \frac{1}{7.41^7} + \ldots\right)$

19. $\pi = 2\left(1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)$

20. $\pi = \sqrt{2}.\left(1 + \frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots\right)$

21. $\pi = 3.\sqrt{3}.\left(1 - \frac{1}{3}.3 + \frac{1}{5}.3^2 - \frac{1}{7}.3^3 + \ldots\right)$

22. $\pi = 4.\frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{120}{121}\ldots$

23. $\pi = 2.\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{35}\cdot\frac{100}{99}\ldots$

24. $\pi = 4.\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots\right)$

wenn die Sehne des Quadranten ($= \frac{1}{2}.\sqrt{2}$ des Durchmessers) zur Einheit angenommen wird.

b) Ausdrücke für den natürlichen Logarithmen von π.

1. $\log nat\, \pi = \log 4 - \frac{1}{1}.\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \ldots\right)$
$- \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \ldots\right)$
$- \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \ldots\right)$
$- \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \ldots\right) -$ u. s. w.

2. $\log nat\, \pi = \log 2 + \frac{1}{1}.\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \ldots\right)$
$+ \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{36^2} + \frac{1}{64^2} + \ldots\right)$
$+ \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{36^3} + \frac{1}{64^3} + \ldots\right)$
$+ \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{36^4} + \frac{1}{64^4} + \ldots\right) +$ u. s. w.

c) **Ausdrücke für die Gröſse des Quadranten durch die Verbindung zweier oder mehrerer Bogen.**

1. $arc\ 45^\circ = arc\ tang\ \frac{1}{2} + arc\ tang\ \frac{1}{3}$

2. $arc\ 45^\circ = 2\ arc\ tang\ \frac{1}{3} + arc\ tang\ \frac{1}{7}$

3. $arc\ 45^\circ = 3\ arc\ tang\ \frac{1}{4} + arc\ tang\ \frac{5}{99}$

4. $arc\ 45^\circ = 4\ arc\ tang\ \frac{1}{5} - arc\ tang\ \frac{1}{239}$

5. $arc\ 45^\circ = 2\ arc\ tang\ \frac{1}{2} - arc\ tang\ \frac{1}{7}$

6. $arc\ 45^\circ = 3\ arc\ tang\ \frac{1}{3} - arc\ tang\ \frac{2}{11}$

7. $arc\ 45^\circ = arc\ tang\ \frac{1}{7} + 2\ arc\ tang\ \frac{1}{3}$

8. $arc\ 45^\circ = 3\ arc\ tang\ \frac{1}{7} + 2\ arc\ tang\ \frac{2}{11}$

9. $arc\ 45^\circ = 5\ arc\ tang\ \frac{1}{7} + 2\ arc\ tang\ \frac{3}{79}$

10. $arc\ 45^\circ = 7\ arc\ tang\ \frac{1}{7} - 2\ arc\ tang\ \frac{29}{278}$

11. $arc\ 45^\circ = 8\ arc\ tang\ \frac{1}{10} - 4\ arc\ tang\ \frac{1}{515} - arc\ tang\ \frac{1}{239}$

Brounker's Reihe für das Quadrat des Durchmessers, wobei die Fläche des Kreises als Einheit angenommen ist.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{u. s. w.}}}}}}$$

XVIII. Trigonometrische Gleichungen.

A) Erste Abtheilung.

Gleichungen, welche kein von trigonometrischen Funktionen unabhängiges Glied enthalten.

Allgemeine Formen:

a) $A\,F(\alpha) = B\,F'(\alpha)$

b) $A\,F^2(\alpha) = B\,F'(\alpha)$

c) $A\,F^2(\alpha) = B\,F'^2(\alpha)$

d) $A\,F(\alpha) = B\,F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha)$

e) $A\,F^2(\alpha) = B\,F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha)$

f) $A\,F(\alpha) \,.\, F'(\alpha) = B\,F''(\alpha) \,.\, F'''(\alpha)$

a) Form: $A\,F(\alpha) = B\,F'(\alpha)$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1.	$A \sin\alpha = B \cos\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \cos\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{A}$
2.	$A \sin\alpha = B \operatorname{tang}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{B}{A}$
3.	$A \sin\alpha = B \cot\alpha$	$\cos\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \cot\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
4.	$A \sin\alpha = B \sec\alpha$	$\sin 2\alpha = \frac{2B}{A}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \sec\alpha$	$\sin 2\alpha = -\frac{2B}{A}$
5.	$A \sin\alpha = B \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
6.	$A\,\cos\alpha = B\,\tan\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\,\cos\alpha = \pm B\,\tan\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
7.	$A\,\cos\alpha = B\,\cot\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A\,\cos\alpha = \pm B\,\cot\alpha$	$\sin\alpha = -\frac{B}{A}$
8.	$A\,\cos\alpha = B\,\sec\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\,\cos\alpha = \pm B\,\sec\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
9.	$A\,\cos\alpha = B\,\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin 2\alpha = \frac{2B}{A}$
	$\mp A\,\cos\alpha = \pm B\,\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin 2\alpha = -\frac{2B}{A}$
10.	$A\,\tan\alpha = B\,\cot\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\,\tan\alpha = \pm B\,\cot\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
11.	$A\,\tan\alpha = B\,\sec\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A\,\tan\alpha = \pm B\,\sec\alpha$	$\sin\alpha = -\frac{B}{A}$
12.	$A\,\tan\alpha = B\,\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\cos\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\,\tan\alpha = \pm B\,\mathrm{cosec}\,\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
13.	$A\,\cot\alpha = B\,\sec\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\,\cot\alpha = \pm B\,\sec\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
14. $A \cot\alpha = B \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B}{A}$
$\mp A \cot\alpha = \pm B \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{B}{A}$
15. $A \sec\alpha = B \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \frac{B}{A}$
$\mp A \sec\alpha = \pm B \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{A}$

b) Form: $A F^2(\alpha) = B F^1(\alpha)$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A \sin^2\alpha = B \cos\alpha$	$\cos\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \cos\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
2. $A \sin^2\alpha = B \operatorname{tang}\alpha$	$\sin 2\alpha = \frac{2B}{A}$
$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha$	$\sin 2\alpha = -\frac{2B}{A}$
3. $A \sin^2\alpha = B \cot\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha - \frac{A}{B} = 0$
$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \cot\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha + \frac{A}{B} = 0$
4. $A \sin^2\alpha = B \sec\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \sec\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha - \frac{B}{A} = 0$
5. $A \sin^2\alpha = B \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
6. $A \cos^2\alpha = B \sin\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
$\mp A \cos^2\alpha = \pm B \sin\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
7.	$A\, cos^2\alpha = B\, tang\,\alpha$	$tang^3\alpha + tang\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\, cos^2\alpha = \pm B\, tang\,\alpha$	$tang^3\alpha + tang\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
8.	$A\, cos^2\alpha = B\, cot\,\alpha$	$sin\, 2\alpha = \frac{2B}{A}$
	$\mp A\, cos^2\alpha = \pm B\, cot\,\alpha$	$sin\, 2\alpha = -\frac{2B}{A}$
9.	$A\, cos^2\alpha = B\, sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\, cos^2\alpha = \pm B\, sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
10.	$A\, cos^2\alpha = B\, cosec\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A\, cos^2\alpha = \pm B\, cosec\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
11.	$A\, tang^2\alpha = B\, sin\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{-A \mp \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A\, tang^2\alpha = \pm B\, sin\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
12.	$A\, tang^2\alpha = B\, cos\,\alpha$	$cos^3\alpha + \frac{A}{B} cos^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\, tang^2\alpha = \pm B\, cos\,\alpha$	$cos^3\alpha - \frac{A}{B} cos^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
13.	$A\, tang^2\alpha = B\, cot\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\, tang^2\alpha = \pm B\, cot\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
14.	$A\, tang^2\alpha = B\, sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\, tang^2\alpha = \pm B\, sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
15.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,cosec\,\alpha$	$sin^3\alpha + \frac{B}{A}sin^2\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A\,tang^2\,\alpha = \pm B\,cosec\,\alpha$	$sin^3\alpha - \frac{B}{A}sin^2\alpha + \frac{B}{A} = 0$
16.	$A\,cot^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha$	$sin^3\alpha + \frac{A}{B}sin^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\,cot^2\,\alpha = \pm B\,sin\,\alpha$	$sin^3\alpha - \frac{A}{B}sin^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
17.	$A\,cot^2\,\alpha = B\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A\,cot^2\,\alpha = \pm B\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
18.	$A\,cot^2\,\alpha = B\,tang\,\alpha$	$cot\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\,cot^2\,\alpha = \pm B\,tang\,\alpha$	$cot\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
19.	$A\,cot^2\,\alpha = B\,sec\,\alpha$	$cos^3\alpha + \frac{B}{A}cos^2\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A\,cot^2\,\alpha = \pm B\,sec\,\alpha$	$cos^3\alpha - \frac{B}{A}cos^2\alpha + \frac{B}{A} = 0$
20.	$A\,cot^2\,\alpha = B\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\,cot^2\,\alpha = \pm B\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
21.	$A\,sec^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,sec^2\,\alpha = \mp B\,sin\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
22.	$A\,sec^2\,\alpha = B\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A\,sec^2\,\alpha = \pm B\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{A}{B}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
23.	$A\,sec^2\alpha = B\,tang\,\alpha$	$sin\,2\alpha = \frac{2A}{B}$
	$\mp A\,sec^2\alpha = \pm B\,tang\,\alpha$	$sin\,2\alpha = -\frac{2A}{B}$
24.	$A\,sec^2\alpha = B\,cot\,\alpha$	$cot^3\alpha - \frac{A}{B}cot^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\,sec^2\alpha = \pm B\,cot\,\alpha$	$cot^3\alpha + \frac{A}{B}cot^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
25.	$A\,sec^2\alpha = B\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A\,sec^2\alpha = \pm B\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
26.	$A\,cosec^2\alpha = B\,sin\,\alpha$	$sin\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A\,cosec^2\alpha = \pm B\,sin\,\alpha$	$sin\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
27.	$A\,cosec^2\alpha = B\,cos\,\alpha$	$cos^3\alpha - cos\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\,cosec^2\alpha = \pm B\,cos\,\alpha$	$cos^3\alpha - cos\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
28.	$A\,cosec^2\alpha = B\,tang\,\alpha$	$tang^3\alpha - \frac{A}{B}tang^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\,cosec^2\alpha = \pm B\,tang\,\alpha$	$tang^3\alpha + \frac{A}{B}tang^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
29.	$A\,cosec^2\alpha = B\,cot\,\alpha$	$sin\,2\alpha = \frac{2A}{B}$
	$\mp A\,cosec^2\alpha = \pm B\,cot\,\alpha$	$sin\,2\alpha = -\frac{2A}{B}$
30.	$A\,cosec^2\alpha = B\,sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A\,cosec^2\alpha = \pm B\,sec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$

c) Form: $A\,F^2(\alpha) = B\,F'^2(\alpha)$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1.	$A \sin^2\alpha = B \cos^2\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \cos^2\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
2.	$A \sin^2\alpha = B \tan^2\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \tan^2\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
3.	$A \sin^2\alpha = B \cot^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(4AB + B^2)}}{2A}\right)}$
	$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \cot^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
4.	$A \sin^2\alpha = B \sec^2\alpha$	$\sin 2\alpha = 2\sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \sec^2\alpha$	$\sin 2\alpha = 2\sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
5.	$A \sin^2\alpha = B \operatorname{cosec}^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[4]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin^2\alpha = \pm B \operatorname{cosec}^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[4]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
6.	$A \cos^2\alpha = B \tan^2\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(4AB + B^2)}}{2A}\right)}$
	$\mp A \cos^2\alpha = \pm B \tan^2\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
7.	$A \cos^2\alpha = B \cot^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \cos^2\alpha = \pm B \cot^2\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
8. $A \cos^2 \alpha = B \sec^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt[4]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \cos^2 \alpha = \pm B \sec^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt[4]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
9. $A \cos^2 \alpha = B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\sin 2\alpha = 2\sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \cos^2 \alpha = \pm B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\sin 2\alpha = 2\sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
10. $A \operatorname{tang}^2 \alpha = B \cot^2 \alpha$	$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt[4]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \operatorname{tang}^2 \alpha = \pm B \cot^2 \alpha$	$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt[4]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
11. $A \operatorname{tang}^2 \alpha = B \sec^2 \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \operatorname{tang}^2 \alpha = \pm B \sec^2 \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
12. $A \operatorname{tang}^2 \alpha = B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(4AB + B^2)}}{2A}\right)}$
$\mp A \operatorname{tang}^2 \alpha = \pm B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
13. $A \cot^2 \alpha = B \sec^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 + 4AB)}}{2A}\right)}$
$\mp A \cot^2 \alpha = \pm B \sec^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
14. $A \cot^2 \alpha = B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\mp A \cot^2 \alpha = \pm B \operatorname{cosec}^2 \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
15.	$A\ sec^2\ \alpha = B\ cosec^2\ \alpha$	$tang\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\ sec^2\ \alpha = \pm B\ cosec^2\ \alpha$	$tang\ \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

d) Form: $A\ F(\alpha) = B\ F^{I}(\alpha)\ .\ F^{II}(\alpha)$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1.	$A\ sin\ \alpha = B\ cos\ \alpha\ .\ tang\ \alpha$	$A = B$
2.	$A\ sin\ \alpha = B\ cos\ \alpha\ .\ cot\ \alpha$	$tang\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ cos\ \alpha\ .\ cot\ \alpha$	$tang\ \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
3.	$A\ sin\ \alpha = B\ cos\ \alpha\ .\ sec\ \alpha$	$sin\ \alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ cos\ \alpha\ .\ sec\ \alpha$	$sin\ \alpha = -\frac{B}{A}$
4.	$A\ sin\ \alpha = B\ cos\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha$	$cos\ \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ cos\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha$	$cos\ \alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
5.	$A\ sin\ \alpha = B\ tang\ \alpha\ .\ cot\ \alpha$	$sin\ \alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ tang\ \alpha\ .\ cot\ \alpha$	$sin\ \alpha = -\frac{B}{A}$
6.	$A\ sin\ \alpha = B\ tang\ \alpha\ .\ sec\ \alpha$	$cos\ \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ tang\ \alpha\ .\ sec\ \alpha$	$cos\ \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
7.	$A\ sin\ \alpha = B\ tang\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha$	$sin\ 2\alpha = \frac{2B}{A}$
	$\mp A\ sin\ \alpha = \pm B\ tang\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha$	$sin\ 2\alpha = -\frac{2B}{A}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
8.	$A \sin\alpha = B \cot\alpha . \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \cot\alpha . \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
9.	$A \sin\alpha = B \cot\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \cot\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha + \frac{A}{B} = 0$
10.	$A \sin\alpha = B \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A \sin\alpha = \pm B \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha - \frac{B}{A} = 0$
11.	$A \cos\alpha = B \sin\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \cos\alpha = \pm B \sin\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
12.	$A \cos\alpha = B \sin\alpha . \cot\alpha$	$A = B$
13.	$A \cos\alpha = B \sin\alpha . \sec\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A \cos\alpha = \pm B \sin\alpha . \sec\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
14.	$A \cos\alpha = B \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \cos\alpha = \pm B \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{B}{A}$
15.	$A \cos\alpha = B \operatorname{tang}\alpha . \cot\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \cos\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha . \cot\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{B}{A}$
16.	$A \cos\alpha = B \operatorname{tang}\alpha . \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A \cos\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha . \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha + \frac{A}{B} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
17.	$A\, cos\,\alpha = B\, tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\, cos\,\alpha = \pm B\, tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
18.	$A\, cos\,\alpha = B\, cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin\,2\alpha = \frac{2B}{A}$
	$\mp A\, cos\,\alpha = \pm B\, cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin\,2\alpha = -\frac{2B}{A}$
19.	$A\, cos\,\alpha = B\, cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A\, cos\,\alpha = \pm B\, cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
20.	$A\, cos\,\alpha = B\, sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha - sin\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A\, cos\,\alpha = \pm B\, sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha - sin\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
21.	$A\, tang\,\alpha = B\, sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A\, tang\,\alpha = \pm B\, sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
22.	$A\, tang\,\alpha = B\, sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A\, tang\,\alpha = \pm B\, sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$sin\,\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
23.	$A\, tang\,\alpha = B\, sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$A = B$
24.	$A\, tang\,\alpha = B\, sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A\, tang\,\alpha = \pm B\, sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = -\frac{B}{A}$
25.	$A\, tang\,\alpha = B\, cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$cos^3\,\alpha + \frac{A}{B}\,cos^2\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A\, tang\,\alpha = \pm B\, cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$cos^3\,\alpha - \frac{A}{B}\,cos^2\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
26.	$A \, tang\, \alpha = B \cos \alpha \,.\, \sec \alpha$	$tang\, \alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \, tang\, \alpha = \pm B \cos \alpha \,.\, \sec \alpha$	$tang\, \alpha = -\frac{B}{A}$
27.	$A \, tang\, \alpha = B \cos \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$tang\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \, tang\, \alpha = \pm B \cos \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$tang\, \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
28.	$A \, tang\, \alpha = B \cot \alpha \,.\, \sec \alpha$	$\cos \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A \, tang\, \alpha = \pm B \cot \alpha \,.\, \sec \alpha$	$\cos \alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
29.	$A \, tang\, \alpha = B \cot \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$\sin^3 \alpha + \frac{B}{A} \sin^2 \alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A \, tang\, \alpha = \pm B \cot \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$\sin^3 \alpha - \frac{B}{A} \sin^2 \alpha + \frac{B}{A} = 0$
30.	$A \, tang\, \alpha = B \sec \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \, tang\, \alpha = \pm B \sec \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
31.	$A \cot \alpha = B \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \cot \alpha = \pm B \sin \alpha \,.\, \cos \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
32.	$A \cot \alpha = B \sin \alpha \,.\, tang\, \alpha$	$\sin^3 \alpha + \frac{A}{B} \sin^2 \alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A \cot \alpha = \pm B \sin \alpha \,.\, tang\, \alpha$	$\sin^3 \alpha - \frac{A}{B} \sin^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
33.	$A \cot \alpha = B \sin \alpha \,.\, \sec \alpha$	$\cot \alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \cot \alpha = \pm B \sin \alpha \,.\, \sec \alpha$	$\cot \alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
34.	$A \cot\alpha = B \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \sin\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot\alpha = -\frac{B}{A}$
35.	$A \cot\alpha = B \cos\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2A}$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \cos\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2A}$
36.	$A \cot\alpha = B \cos\alpha . \sec\alpha$	$\cot\alpha = \frac{B}{A}$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \cos\alpha . \sec\alpha$	$\cot\alpha = -\frac{B}{A}$
37.	$A \cot\alpha = B \cos\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$A = B$
38.	$A \cot\alpha = B \operatorname{tang}\alpha . \sec\alpha$	$\cos^3\alpha + \frac{B}{A}\cos^2\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha . \sec\alpha$	$\cos^3\alpha - \frac{B}{A}\cos^2\alpha + \frac{B}{A} = 0$
39.	$A \cot\alpha = B \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2)}}{2A}$
40.	$A \cot\alpha = B \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \cot\alpha = \pm B \sec\alpha . \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
41.	$A \sec\alpha = B \sin\alpha . \cos\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \sin\alpha . \cos\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha - \frac{A}{B} = 0$
42.	$A \sec\alpha = B \sin\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \sin\alpha . \operatorname{tang}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
43.	$A \sec\alpha = B \sin\alpha \cdot \cot\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \sin\alpha \cdot \cot\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
44.	$A \sec\alpha = B \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{A}{B}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{A}{B}$
45.	$A \sec\alpha = B \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha$	$\sin 2\alpha = \frac{2A}{B}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}\alpha$	$\sin 2\alpha = -\frac{2A}{B}$
46.	$A \sec\alpha = B \cos\alpha \cdot \cot\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \cos\alpha \cdot \cot\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha + \frac{B}{A} = 0$
47.	$A \sec\alpha = B \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin\alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
48.	$A \sec\alpha = B \operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\alpha$	$\cos\alpha = \frac{A}{B}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \operatorname{tang}\alpha \cdot \cot\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{A}{B}$
49.	$A \sec\alpha = B \operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$A = B$
50.	$A \sec\alpha = B \cot\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\mp A \sec\alpha = \pm B \cot\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
51.	$A \operatorname{cosec}\alpha = B \sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\mp A \operatorname{cosec}\alpha = \pm B \sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha - \frac{A}{B} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
52.	$A \, cosec\, \alpha = B \sin \alpha . tang\, \alpha$	$\cot^3 \alpha + \cot \alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \sin \alpha . tang\, \alpha$	$\cot^3 \alpha + \cot \alpha + \frac{B}{A} = 0$
53.	$A \, cosec\, \alpha = B \sin \alpha . \cot \alpha$	$\sin 2\alpha = \frac{2A}{B}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \sin \alpha . \cot \alpha$	$\sin 2\alpha = -\frac{2A}{B}$
54.	$A \, cosec\, \alpha = B \sin \alpha . \sec \alpha$	$\cos \alpha = \frac{-A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \sin \alpha . \sec \alpha$	$\cos \alpha = \frac{A \pm \sqrt{(4B^2 + A^2)}}{2B}$
55.	$A \, cosec\, \alpha = B \cos \alpha . tang\, \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \cos \alpha . tang\, \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
56.	$A \, cosec\, \alpha = B \cos \alpha . \cot \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \cos \alpha . \cot \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
57.	$A \, cosec\, \alpha = B \cos \alpha . \sec \alpha$	$\sin \alpha = \frac{A}{B}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \cos \alpha . \sec \alpha$	$\sin \alpha = -\frac{A}{B}$
58.	$A \, cosec\, \alpha = B \, tang\, \alpha . \cot \alpha$	$\sin \alpha = \frac{A}{B}$
	$\mp A \, cosec\, \alpha = \pm B \, tang\, \alpha . \cot \alpha$	$\sin \alpha = -\frac{A}{B}$
59.	$A \, cosec\, \alpha = B \, tang\, \alpha . \sec \alpha$	$tang\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\mp A \cos \alpha = \pm B \, tang\, \alpha . \sec \alpha$	$tang\, \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
60.	$A \, cosec\, \alpha = B \cot \alpha . \sec \alpha$	$A = B$

e) Form: $A\,F^2(\alpha) = B\,F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha)$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1.	$A \sin^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \tang\alpha$	$\sin\alpha = \frac{B}{A}$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \tang\alpha$	$\sin\alpha = -\frac{B}{A}$
2.	$A \sin^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin^3\alpha + \frac{B}{A}\sin^2\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin^3\alpha - \frac{B}{A}\sin^2\alpha + \frac{B}{A} = 0$
3.	$A \sin^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
4.	$A \sin^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cot^3\alpha + \cot\alpha + \frac{A}{B} = 0$
5.	$A \sin^2\alpha = B \tang\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \tang\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
6.	$A \sin^2\alpha = B \tang\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \tang\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha - \frac{B}{A} = 0$
7.	$A \sin^2\alpha = B \tang\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \tang\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha - \frac{B}{A} = 0$
8.	$A \sin^2\alpha = B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
9.	$A \sin^2\alpha = B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha - \frac{B}{A}\cos\alpha + 1 = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + \frac{B}{A}\cos\alpha + 1 = 0$
10.	$A \sin^2\alpha = B \sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin^8\alpha - \sin^6\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
	$\pm A \sin^2\alpha = \mp B \sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\sin^8\alpha - \sin^6\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
11.	$A \cos^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\cos^3\alpha + \frac{B}{A}\cos^2\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\cos^3\alpha - \frac{B}{A}\cos^2\alpha + \frac{B}{A} = 0$
12.	$A \cos^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos\alpha = \frac{B}{A}$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{B}{A}$
13.	$A \cos^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \operatorname{tang}\alpha + \frac{A}{B} = 0$
14.	$A \cos^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
15.	$A \cos^2\alpha = B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
16.	$A \cos^2\alpha = B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha - \frac{B}{A}\sin\alpha + 1 = 0$
	$\pm A \cos^2\alpha = \mp B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + \frac{B}{A}\sin\alpha + 1 = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
17.	$A\,cos^2\,\alpha = B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\,cos^2\,\alpha = \mp B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
18.	$A\,cos^2\,\alpha = B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha - sin\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A\,cos^2\,\alpha = \mp B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha - sin\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
19.	$A\,cos^2\,\alpha = B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^3\,\alpha - cos\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A\,cos^2\,\alpha = \mp B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^3\,\alpha - cos\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
20.	$A\,cos^2\,\alpha = B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^8\,\alpha - cos^6\,\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
	$\pm A\,cos^2\,\alpha = \mp B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^8\,\alpha - cos^6\,\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
21.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$tang^3\,\alpha + tang\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$tang^3\,\alpha + tang\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
22.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$cos^3\,\alpha + \frac{A}{B}\,cos^2\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$cos^3\,\alpha - \frac{A}{B}\,cos^2\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
23.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \frac{B}{A}$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$tang\,\alpha = -\frac{B}{A}$
24.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
25.	$A\,tang^2\,\alpha = B\cos\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$sin^4\,\alpha - \frac{A}{B}\,sin^3\,\alpha - 2\,sin^2\,\alpha + 1 = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\cos\alpha\,.\,cot\,\alpha$	$sin^4\,\alpha + \frac{A}{B}\,sin^3\,\alpha - 2\,sin^2\,\alpha + 1 = 0$
26.	$A\,tang^2\,\alpha = B\cos\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\cos\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
27.	$A\,tang^3\,\alpha = B\cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\,tang^3\,\alpha = \mp B\cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$tang\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
28.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha + \frac{B}{A}\,sin^2\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha$	$sin^3\,\alpha - \frac{B}{A}\,sin^2\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
29.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^4\,\alpha - \frac{B}{A}\,cos^3\,\alpha - 2\,cos^2\,\alpha + 1 = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cos^4\,\alpha + \frac{B}{A}\,cos^3\,\alpha - 2\,cos^2\,\alpha + 1 = 0$
30.	$A\,tang^2\,\alpha = B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cot^3\,\alpha + cot\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,tang^2\,\alpha = \mp B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha$	$cot^3\,\alpha + cot\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
31.	$A\,cot^2\,\alpha = B\sin\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$cot^3\,\alpha + cot\,\alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A\,cot^2\,\alpha = \mp B\sin\alpha\,.\,cos\,\alpha$	$cot^3\,\alpha + cot\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
32.	$A\,cot^2\,\alpha = B\sin\alpha\,.\,tang\,\alpha$	$cos^4\,\alpha - \frac{A}{B}\,cos^3\,\alpha - 2\,cos^2\,\alpha + 1 = 0$
	$\pm A\,cot^2\,\alpha = \mp B\sin\alpha\,.\,tang\,\alpha$	$cos^4\,\alpha + \frac{A}{B}\,cos^3\,\alpha - 2\,cos^2\,\alpha + 1 = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
33.	$A \cot^2 \alpha = B \sin \alpha . \sec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \sin \alpha . \sec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
34.	$A \cot^2 \alpha = B \sin \alpha . \cosec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \sin \alpha . \cosec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
35.	$A \cot^2 \alpha = B \cos \alpha . \tang \alpha$	$\sin^3 \alpha + \frac{A}{B} \sin^2 \alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \cos \alpha . \tang \alpha$	$\sin^3 \alpha - \frac{A}{B} \sin^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
36.	$A \cot^2 \alpha = B \cos \alpha . \sec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \cos \alpha . \sec \alpha$	$\tang \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
37.	$A \cot^2 \alpha = B \cos \alpha . \cosec \alpha$	$\tang \alpha = \frac{A}{B}$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \cos \alpha . \cosec \alpha$	$\tang \alpha = -\frac{A}{B}$
38.	$A \cot^2 \alpha = B \tang \alpha . \sec \alpha$	$\sin^4 \alpha - \frac{B}{A} \sin^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 = 0$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \tang \alpha . \sec \alpha$	$\sin^4 \alpha + \frac{B}{A} \sin^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 = 0$
39.	$A \cot^2 \alpha = B \tang \alpha . \cosec \alpha$	$\cos^3 \alpha + \frac{B}{A} \cos^2 \alpha - \frac{B}{A} = 0$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \tang \alpha . \cosec \alpha$	$\cos^3 \alpha - \frac{B}{A} \cos^2 \alpha + \frac{B}{A} = 0$
40.	$A \cot^2 \alpha = B \sec \alpha . \cosec \alpha$	$\tang^3 \alpha + \tang \alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \cot^2 \alpha = \mp B \sec \alpha . \cosec \alpha$	$\tang^3 \alpha + \tang \alpha + \frac{A}{B} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
41.	$A\,sec^2\alpha = B\,sin\,\alpha \,.\, cos\,\alpha$	$cos^8\alpha - cos^6\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,sin\,\alpha \,.\, cos\,\alpha$	$cos^8\alpha - cos^6\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
42.	$A\,sec^2\alpha = B\,sin\,\alpha \,.\, tang\,\alpha$	$cos^3\alpha - cos\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,sin\,\alpha \,.\, tang\,\alpha$	$cos^3\alpha - cos\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
43.	$A\,sec^2\alpha = B\,sin\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,sin\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
44.	$A\,sec^2\alpha = B\,sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
45.	$A\,sec^2\alpha = B\,cos\,\alpha \,.\, tang\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,cos\,\alpha \,.\, tang\,\alpha$	$sin^3\alpha - sin\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
46.	$A\,sec^2\alpha = B\,cos\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$sin^4\alpha - 2\,sin^2\alpha - \frac{A}{B}\,sin\,\alpha + 1 = 0$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,cos\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$sin^4\alpha - 2\,sin^2\alpha + \frac{A}{B}\,sin\,\alpha + 1 = 0$
47.	$A\,sec^2\alpha = B\,cos\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha$	$cot^3\alpha - \frac{A}{B}\,cot^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,cos\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha$	$cot^3\alpha + \frac{A}{B}\,cot^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
48.	$A\,sec^2\alpha = B\,tang\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A\,sec^2\alpha = \mp B\,tang\,\alpha \,.\, cot\,\alpha$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
49.	$A \sec^2\alpha = B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = \frac{A}{B}$
	$\pm A \sec^2\alpha = \mp B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos\alpha = -\frac{A}{B}$
50.	$A \sec^2\alpha = B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha + \frac{A}{B}\cos^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \sec^2\alpha = \mp B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha$	$\cos^3\alpha - \frac{A}{B}\cos^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
51.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$	$\sin^8\alpha - \sin^6\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$	$\sin^8\alpha - \sin^6\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
52.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha - \frac{A}{B}\cos\alpha + 1 = 0$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + \frac{A}{B}\cos\alpha + 1 = 0$
53.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\cos^3\alpha - \cos\alpha - \frac{A}{B} = 0$
54.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha - \frac{A}{B}\operatorname{tang}^2\alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\operatorname{tang}^3\alpha + \frac{A}{B}\operatorname{tang}^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
55.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
56.	$A \operatorname{cosec}^2\alpha = B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha + \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A \operatorname{cosec}^2\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\sin^3\alpha - \sin\alpha - \frac{A}{B} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
57.	$A\, cosec^2 \alpha = B\, cos\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A\, cosec^2 \alpha = \mp B\, cos\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
58.	$A\, cosec^2 \alpha = B\, tang\, \alpha \,.\, cot\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)}$
	$\pm A\, cosec^2 \alpha = \mp B\, tang\, \alpha \,.\, cot\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)}$
59.	$A\, cosec^2 \alpha = B\, tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin^3 \alpha + \frac{A}{B} sin^2 \alpha - \frac{A}{B} = 0$
	$\pm A\, cosec^2 \alpha = \mp B\, tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin^3 \alpha - \frac{A}{B} sin^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
60.	$A\, cosec^2 \alpha = B\, cot\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \frac{A}{B}$
	$\pm A\, cosec^2 \alpha = \mp B\, cot\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$sin\, \alpha = -\frac{A}{B}$

f) Form: $A\, F(\alpha) \,.\, F^{I}(\alpha) = B\, F^{II}(\alpha) \,.\, F^{III}(\alpha)$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1.	$A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = B\, tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$cos\, \alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = \mp B\, tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha$	$cos\, \alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
2.	$A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = B\, cot\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
	$\pm A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = \mp B\, cot\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
3.	$A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = B\, sec\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4B}{A}\right)}}{2}\right)}$
	$\pm A\, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = \mp B\, sec\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{4B}{A}\right)}}{2}\right)}$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
4. $A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\pm A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = \mp B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
5. $A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = B \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 + 4AB)}}{2A}\right)}$
$\pm A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = \mp B \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{+B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
6. $A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = B \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\pm A \sin\alpha \,.\, \tan\alpha = \mp B \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\sin\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
7. $A \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = B \tan\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 + 4AB)}}{2A}\right)}$
$\pm A \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = \mp B \tan\alpha \,.\, \sec\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{+B \pm \sqrt{(B^2 - 4AB)}}{2A}\right)}$
8. $A \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = B \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\pm A \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = \mp B \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\cos\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$
9. $A \tan\alpha \,.\, \sec\alpha = B \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{B}{A}\right)}$
$\pm A \tan\alpha \,.\, \sec\alpha = \mp B \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$\tan\alpha = \sqrt[3]{\left(-\frac{B}{A}\right)}$

Anmerkung. Die übrigen Gleichungen von dieser Form lassen sich bequem, vermittelst Substitutionen für die Produkte der trigonometrischen Funktionen, oder durch Weglassung der gleichen Faktoren, auf Formen zurückführen, die schon früher entwickelt worden; weshalb sie hier nicht mit angegeben sind. Man befrage darüber die am Ende der zweiten Abtheilung dieser Gleichungen mitgetheilte Tabelle.

B) Zweite Abtheilung.

Gleichungen, welche ein von trigonometrischen Funktionen unabhängiges Glied enthalten.

Allgemeine Formen:

a) $A\,F(\alpha) + B\,F'(\alpha) = C$
d) $A\,F(\alpha) + B\,F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha) = C.$
b) $A\,F^2(\alpha) + B\,F'(\alpha) = C$
e) $A\,F^2(\alpha) + B\,F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha) = C$
c) $A\,F^2(\alpha) + B\,F'^2(\alpha) = C$
f) $A\,F(\alpha) \,.\, F'(\alpha) + B\,F''(\alpha) \,.\, F'''(\alpha) = C$

a) Form: $A\,F(\alpha) + B\,F'(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A \sin\alpha + B \cos\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{AC \pm B\sqrt{(A^2 - C^2 + B^2)}}{A^2 + B^2}$
2. $A \sin\alpha + B \operatorname{tang}\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2C}{A}\sin^3\alpha + \left(\frac{B^2 + C^2 - A^2}{A^2}\right)\sin^2\alpha - \frac{2C}{A}\sin\alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$
3. $A \sin\alpha + B \cot\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2C}{A}\sin^3\alpha + \left(\frac{C^2 + B^2}{A^2}\right)\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
4. $A \sin\alpha + B \sec\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \left(\frac{C^2 - A^2}{A^2}\right)\cos^2\alpha - \frac{2BC}{A^2}\cos\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
5. $A \sin\alpha + B \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2 - 4AB)}}{2A}$
6. $A \cos\alpha + B \operatorname{tang}\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2C}{A}\cos^3\alpha + \left(\frac{C^2 + B^2}{A^2}\right)\cos^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
7. $A \cos\alpha + B \cot\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{2B}{A}\sin^3\alpha + \left(\frac{B^2 + C^2 - A^2}{A^2}\right)\sin^2\alpha - \frac{2B}{A}\sin\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
8. $A\cos\alpha + B\sec\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2 - 4AB)}}{2A}$
9. $A\cos\alpha + B\,\mathrm{cosec}\,\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{C^2 - A^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{2BC}{A^2}\sin\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
10. $A\,\mathrm{tang}\,\alpha + B\cot\alpha = C$	$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2 - 4AB)}}{2A}$
11. $A\,\mathrm{tang}\,\alpha + B\sec\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{-AB \pm C\sqrt{(A^2 - B^2 + C^2)}}{A^2 + C^2}$
12. $A\,\mathrm{tang}\,\alpha + B\,\mathrm{cosec}\,\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2BC}{A^2 + C^2}\sin^3\alpha + \frac{B^2 - C^2}{A^2 + C^2}\sin^2\alpha + \frac{2BC}{A^2 + C^2}\sin\alpha - \frac{B^2}{A^2 + C^2} = 0$
13. $A\cot\alpha + B\sec\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2BC}{A^2 + C^2}\cos^3\alpha + \frac{B^2 - C^2}{A^2 + C^2}\cos^2\alpha + \frac{2BC}{A^2 + C^2}\cos\alpha - \frac{B^2}{A^2 + C^2} = 0$
14. $A\cot\alpha + B\,\mathrm{cosec}\,\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{CB \pm A\sqrt{(C^2 + A^2 - B^2)}}{C^2 + A^2}$
15. $A\sec\alpha + B\,\mathrm{cosec}\,\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2B}{C}\sin^3\alpha + \left(\frac{A^2 + B^2 - C^2}{C^2}\right)\sin^2\alpha + \frac{2B}{C}\sin\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$

b) Form: $A\,F^2(\alpha) + B\,F'(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A\sin^2\alpha + B\sin\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2A}$
2. $A\sin^2\alpha + B\cos\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 - 4AC + B^2)}}{2A}$
3. $A\sin^2\alpha + B\,\mathrm{tang}\,\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2C + A}{A}\sin^4\alpha + \frac{B^2 + C^2 + 2AC}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
4.	$A \sin^2\alpha + B \cot\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2C}{A}\sin^4\alpha + \frac{C^2+B^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
5.	$A \sin^2\alpha + B \sec\alpha = C$	$\cos^3\alpha + \frac{C-A}{A}\cos\alpha - \frac{B}{A} = 0$
6.	$A \sin^2\alpha + B \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{C}{A}\sin\alpha + \frac{B}{A} = 0$
7.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 - 4AC + B^2)}}{2A}$
8.	$A \cos^2\alpha + B \cos\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2A}$
9.	$A \cos^2\alpha + B \operatorname{tang}\alpha = C$	$\operatorname{tang}^3\alpha - \frac{C}{B}\operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}\alpha + \frac{A-C}{B} = 0$
10.	$A \cos^2\alpha + B \cot\alpha = C$	$\cot^3\alpha + \frac{A-C}{B}\cot^2\alpha + \cot\alpha - \frac{C}{B} = 0$
11.	$A \cos^2\alpha + B \sec\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{C}{A}\cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
12.	$A \cos^2\alpha + B \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^3\alpha + \frac{C-A}{A}\sin\alpha - \frac{B}{A} = 0$
13.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \sin\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{A+C}{B}\sin^2\alpha - \sin\alpha + \frac{C}{B} = 0$
14.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \cos\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{A+C}{B}\cos^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
15.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \operatorname{tang}\alpha = C$	$\operatorname{tang}\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2A}$
16.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \cot\alpha = C$	$\operatorname{tang}^3\alpha - \frac{C}{A}\operatorname{tang}\alpha + \frac{B}{A} = 0$
17.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \sec\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + 4AC + B^2)}}{2(A+C)}$
18.	$A \operatorname{tang}^2\alpha + B \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{B}{A+C}\sin^2\alpha - \frac{C}{A+C}\sin\alpha + \frac{B}{A+C} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
19.	$A \cot^2 \alpha + B \sin \alpha = C$	$\sin^3 \alpha - \frac{A+C}{B} \sin^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
20.	$A \cot^2 \alpha + B \cos \alpha = C$	$\cos^3 \alpha - \frac{A+C}{B} \cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{C}{B} = 0$
21.	$A \cot^2 \alpha + B \tan g \alpha = C$	$\cot^3 \alpha - \frac{C}{A} \cot \alpha + \frac{B}{A} = 0$
22.	$A \cot^2 \alpha + B \cot \alpha = C$	$\cot \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC+B^2)}}{2A}$
23.	$A \cot^2 \alpha + B \sec \alpha = C$	$\cos^3 \alpha - \frac{B}{A+C} \cos^2 \alpha - \frac{C}{A+C} \cos \alpha + \frac{B}{A+C} = 0$
24.	$A \cot^2 \alpha + B \operatorname{cosec} \alpha = C$	$\sin \alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2+4AC+B^2)}}{2(A+C)}$
25.	$A \sec^2 \alpha + B \sin \alpha = C$	$\sin^3 \alpha - \frac{C}{B} \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \frac{C-A}{B} = 0$
26.	$A \sec^2 \alpha + B \cos \alpha = C$	$\cos^3 \alpha - \frac{C}{B} \cos^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
27.	$A \sec^2 \alpha + B \tan g \alpha = C$	$\tan g \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC-4A^2+B^2)}}{2A}$
28.	$A \sec^2 \alpha + B \cot \alpha = C$	$\cot^3 \alpha + \frac{A-C}{B} \cot^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
29.	$A \sec^2 \alpha + B \sec \alpha = C$	$\cos \alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4AC+B^2)}}{2C}$
30.	$A \sec^2 \alpha + B \operatorname{cosec} \alpha = C$	$\sin^3 \alpha - \frac{B}{C} \sin^2 \alpha + \frac{A-C}{C} \sin \alpha + \frac{B}{C} = 0$
31.	$A \operatorname{cosec}^2 \alpha + B \sin \alpha = C$	$\sin^3 \alpha - \frac{C}{B} \sin^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
32.	$A \operatorname{cosec}^2 \alpha + B \cos \alpha = C$	$\cos^3 \alpha - \frac{C}{B} \cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{C-A}{B} = 0$
33.	$A \operatorname{cosec}^2 \alpha + B \tan g \alpha = C$	$\tan g^3 \alpha + \frac{A-C}{B} \tan g^2 \alpha + \frac{A}{B} = 0$
34.	$A \operatorname{cosec}^2 \alpha + B \cot \alpha = C$	$\cot \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{4AC-4A^2+B^2)}}{2A}$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
35. $A\,cosec^2\,\alpha + B\,sec\,\alpha = C$	$cos^3\,\alpha - \frac{B}{C}\,cos^2\,\alpha + \frac{A-C}{C}\,cos\,\alpha + \frac{B}{C} = 0$
36. $A\,cosec^2\,\alpha + B\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2C}$

c) Form: $A\,F^2(\alpha) + B\,F'^2(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A\,sin^2\,\alpha + B\,cos^2\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A-C}{A-B}\right)}$
2. $A\,sin^2\,\alpha + B\,tang^2\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+B+C \pm \sqrt{(A^2+B^2+C^2+2AB+2BC-2AC)}}{2A}\right)}$
3. $A\,sin^2\,\alpha + B\,cot^2\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B+C \pm \sqrt{((B+C)^2-4AB)}}{2A}\right)}$
4. $A\,sin^2\,\alpha + B\,sec^2\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+C \pm \sqrt{((A-C)^2+4AB)}}{2A}\right)}$
5. $A\,sin^2\,\alpha + B\,cosec^2\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}\right)}$
6. $A\,cos^2\,\alpha + B\,tang^2\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B+C \pm \sqrt{((B+C)^2-4AB)}}{2A}\right)}$
7. $A\,cos^2\,\alpha + B\,cot^2\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+B+C \pm \sqrt{(A^2+B^2+C^2+2AB+2BC-2AC)}}{2A}\right)}$
8. $A\,cos^2\,\alpha + B\,sec^2\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}\right)}$
9. $A\,cos^2\,\alpha + B\,cosec^2\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+C \pm \sqrt{((A-C)^2+4AB)}}{2A}\right)}$
10. $A\,tang^2\,\alpha + B\,cot^2\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}\right)}$
11. $A\,tang^2\,\alpha + B\,sec^2\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A+B}\right)}$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
12. $A\,tang^2\alpha + B\,cosec^2\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B\pm\sqrt{((B-C)^2-4AB)}}{2A}\right)}$
13. $A\,cot^2\alpha + B\,sec^2\alpha = C$	$cot\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B\pm\sqrt{((B-C)^2-4AB)}}{2A}\right)}$
14. $A\,cot^2\alpha + B\,cosec^2\alpha = C$	$cot\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A+B}\right)}$
15. $A\,sec^2\alpha + B\,cosec^2\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{B+C-A\pm\sqrt{((B-C)^2+A^2-2AB-2AC)}}{2C}\right)}$

d) Form: $A\,F(\alpha) + B\,F^{I}(\alpha)\,.\,F^{II}(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A\,sin\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = C$	$sin^4\alpha + \frac{A^2-B^2}{B^2}sin^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}sin\,\alpha + \frac{C^2}{B^2} = 0$
2. $A\,sin\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2AC}{A^2+B^2}sin^3\alpha + \frac{C^2-A^2}{A^2+B^2}sin^2\alpha + \frac{2AC}{A^2+B^2}sin\,\alpha - \frac{C^2}{A^2+B^2} = 0$
3. $A\,sin\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{AC\pm B\sqrt{(A^2+B^2-C^2)}}{A^2+B^2}$
4. $A\,sin\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2C}{A}sin^3\alpha + \frac{B^2+C^2-A^2}{A^2}sin^2\alpha - \frac{2C}{A}sin\,\alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$
5. $A\,sin\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{C-B}{A}$
6. $A\,sin\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{C}{A+B}$
7. $A\,sin\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{C\pm\sqrt{(C^2+4B^2-4AB)}}{2(A-B)}$
8. $A\,sin\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{C-B}{A}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
9.	$A \sin\alpha + B \cos\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2C}{A}\sin^3\alpha + \frac{C^2+B^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
10.	$A \sin\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{C-B}{A}$
11.	$A \sin\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{C}{A}\sin^2\alpha - \frac{A+B}{A}\sin\alpha + \frac{C}{A} = 0$
12.	$A \sin\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{C^2-A^2}{A^2}\cos^2\alpha - \frac{2BC}{A^2}\cos\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
13.	$A \sin\alpha + B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}$
14.	$A \sin\alpha + B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2C}{A}\sin^5\alpha + \frac{C^2}{A^2}\sin^4\alpha + \frac{B^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
15.	$A \sin\alpha + B \sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2C}{A}\sin^5\alpha + \frac{C^2-A^2}{A^2}\sin^4\alpha + \frac{2C}{A}\sin^3\alpha - \frac{C^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
16.	$A \cos\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{A^2-B^2}{B^2}\cos^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}\cos\alpha + \frac{C^2}{B^2} = 0$
17.	$A \cos\alpha + B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB+4B^2)}}{2(A-B)}$
18.	$A \cos\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C}{A+B}$
19.	$A \cos\alpha + B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2C}{A}\cos^3\alpha + \frac{C^2+B^2}{A^2}\cos^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
20.	$A\cos\alpha + B\sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C-B}{A}$
21.	$A\cos\alpha + B\cos\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{BC \pm A\sqrt{(B^2-C^2+A^2)}}{A^2+B^2}$
22.	$A\cos\alpha + B\cos\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2AC}{A^2+B^2}\cos^3\alpha + \frac{C^2-A^2}{A^2+B^2}\cos^2\alpha + \frac{2AC}{A^2+B^2}\cos\alpha - \frac{C^2}{A^2+B^2} = 0$
23.	$A\cos\alpha + B\cos\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C-B}{A}$
24.	$A\cos\alpha + B\cos\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{2B}{A}\sin^3\alpha + \frac{B^2+C^2-A^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{2B}{A}\sin\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
25.	$A\cos\alpha + B\operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C-B}{A}$
26.	$A\cos\alpha + B\operatorname{tang}\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\cos^6\alpha - \frac{2C}{A}\cos^5\alpha + \frac{C^2}{A^2}\cos^4\alpha + \frac{B^2}{A^2}\cos^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
27.	$A\cos\alpha + B\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}$
28.	$A\cos\alpha + B\cot\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{C^2-A^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{2BC}{A^2}\sin\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
29.	$A\cos\alpha + B\cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{C}{A}\cos^2\alpha - \frac{A+B}{A}\cos\alpha + \frac{C}{A} = 0$
30.	$A\cos\alpha + B\sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2A^2-C^2}{A^2}\sin^4\alpha - \frac{2B}{A}\sin^3\alpha + \frac{A^2-C^2}{A^2}\sin^2\alpha + \frac{2B}{A}\sin\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
31.	$A\operatorname{tang}\alpha + B\sin\alpha \,.\, \cos\alpha = C$	$\sin^6\alpha + \frac{2(A+B)}{B}\sin^4\alpha + \frac{(A+B)^2+C^2}{B^2}\sin^2\alpha - \frac{C^2}{B^2} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
32.	$A\,tang\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^4\alpha + \frac{2A}{B} sin^3\alpha + \frac{A^2+C^2}{B^2} sin^2\alpha - \frac{C^2}{B^2} = 0$
33.	$A\,tang\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$cos^4\alpha - \frac{2C}{B} cos^3\alpha + \frac{C^2+A^2}{B^2} cos^2\alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
34.	$A\,tang\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{C}{A+B}$
35.	$A\,tang\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{C-B}{A}$
36.	$A\,tang\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2C}{B} sin^3\alpha + \frac{A^2+C^2-B^2}{B^2} sin^2\alpha - \frac{2C}{B} sin\,\alpha - \frac{C^2}{B^2} = 0$
37.	$A\,tang\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$cos^6\alpha - \frac{2A}{B} cos^5\alpha + \frac{A^2+C^2}{B^2} cos^4\alpha + \frac{2A}{B} cos^3\alpha - \frac{2A^2+C^2}{B^2} cos^2\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
38.	$A\,tang\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{C-B}{A}$
39.	$A\,tang\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2A}$
40.	$A\,tang\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{C-B}{A}$
41.	$A\,tang\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha + \frac{2BC}{A^2+C^2} sin^3\alpha + \frac{B^2-A^2-2C^2}{A^2+C^2} sin^2\alpha - \frac{2BC}{A^2+C^2} sin\,\alpha + \frac{C^2}{A^2+C^2} = 0$
42.	$A\,tang\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{-AB \pm C\sqrt{(A^2-B^2+C^2)}}{A^2+C^2}$
43.	$A\,tang\,\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2BC}{A^2+C^2} sin^3\alpha + \frac{B^2-C^2}{A^2+C^2} sin^2\alpha + \frac{2BC}{A^2+C^2} sin\,\alpha - \frac{B^2}{A^2+C^2} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
44.	$A \, tang \, \alpha + B \cot \alpha \, . \, cosec \, \alpha = C$	$\sin^6 \alpha - \frac{2AB}{A^2+C^2} \sin^5 \alpha + \frac{B^2-C^2}{A^2+C^2} \sin^4 \alpha + \frac{2AB}{A^2+C^2} \sin^3 \alpha - \frac{2B^2}{A^2+C^2} \sin^2 \alpha + \frac{B^2}{A^2+C^2} = 0$
45.	$A \, tang \, \alpha + B \sec \alpha \, . \, cosec \, \alpha = C$	$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{C^2 - 2AB \pm C\sqrt{(C^2-4AB-4B^2)}}{2(A^2+C^2)}\right)}$
46.	$A \cot \alpha + B \sin \alpha \, . \, \cos \alpha = C$	$\sin^6 \alpha + \frac{2A-B}{B} \sin^4 \alpha + \frac{A^2-2AB+C^2}{B^2} \sin^2 \alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
47.	$A \cot \alpha + B \sin \alpha \, . \, tang \, \alpha = C$	$\sin^6 \alpha - \frac{2A}{B} \sin^5 \alpha + \frac{A^2+C^2}{B^2} \sin^4 \alpha + \frac{2A}{B} \sin^3 \alpha - \frac{2A^2+C^2}{B^2} \sin^2 \alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
48.	$A \cot \alpha + B \sin \alpha \, . \, \cot \alpha = C$	$\sin^4 \alpha + \frac{2A}{B} \sin^3 \alpha + \frac{A^2+C^2-B^2}{B^2} \sin^2 \alpha - \frac{2A}{B} \sin \alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
49.	$A \cot \alpha + B \sin \alpha \, . \, \sec \alpha = C$	$tang \, \alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2B}$
50.	$A \cot \alpha + B \sin \alpha \, . \, cosec \, \alpha = C$	$\cot \alpha = \frac{C-B}{A}$
51.	$A \cot \alpha + B \cos \alpha \, . \, tang \, \alpha = C$	$\sin^4 \alpha - \frac{2C}{B} \sin^3 \alpha + \frac{A^2+C^2}{B^2} \sin^2 \alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
52.	$A \cot \alpha + B \cos \alpha \, . \, \cot \alpha = C$	$\cos^4 \alpha + \frac{2A}{B} \cos^3 \alpha + \frac{A^2+C^2}{B^2} \cos^2 \alpha - \frac{C^2}{B^2} = 0$
53.	$A \cot \alpha + B \cos \alpha \, . \, \sec \alpha = C$	$\cot \alpha = \frac{C-B}{A}$

Gegebene Gleichung: / **Entwickelte Gleichung:**

54. $A \cot\alpha + B \cos\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$

$$\cot\alpha = \frac{C}{A+B}$$

55. $A \cot\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \cot\alpha = C$

$$\cot\alpha = \frac{C-B}{A}$$

56. $A \cot\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \sec\alpha = C$

$$\cos^6\alpha - \frac{2AB}{A^2+C^2}\cos^5\alpha + \frac{B^2-C^2}{A^2+C^2}\cos^4\alpha + \frac{2AB}{A^2+C^2}\cos^3\alpha - \frac{2B^2}{A^2+C^2}\cos^2\alpha + \frac{B^2}{A^2+C^2} = 0$$

57. $A \cot\alpha + B \operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$

$$\cos^4\alpha - \frac{2BC}{A^2+C^2}\cos^3\alpha + \frac{B^2-C^2}{A^2+C^2}\cos^2\alpha + \frac{2BC}{A^2+C^2}\cos\alpha - \frac{B^2}{A^2+C^2} = 0$$

58. $A \cot\alpha + B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha = C$

$$\sin\alpha = \frac{BC \pm A\sqrt{(A^2+C^2-B^2)}}{A^2+C^2}$$

59. $A \cot\alpha + B \cot\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$

$$\cos^4\alpha + \frac{2BC}{A^2+C^2}\cos^3\alpha + \frac{B^2-A^2-2C^2}{A^2+C^2}\cos^2\alpha - \frac{2BC}{A^2+C^2}\cos\alpha + \frac{C^2}{A^2+C^2} = 0$$

60. $A \cot\alpha + B \sec\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$

$$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{C^2-2AB \pm C\sqrt{(C^2-4AB-4B^2)}}{2(A^2+B^2)}\right)}$$

61. $A \sec\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = C$

$$\cos^6\alpha - \cos^4\alpha + \frac{C^2}{B^2}\cos^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}\cos\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$$

62. $A \sec\alpha + B \sin\alpha \,.\, \operatorname{tang}\alpha = C$

$$\cos\alpha = \frac{-C \pm \sqrt{(C^2+4B^2+4AB)}}{2B}$$

63. $A \sec\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha = C$

$$\cos\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2B}$$

64. $A \sec\alpha + B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha = C$

$$\sin\alpha = \frac{-AB \pm C\sqrt{(B^2+C^2-A^2)}}{B^2+C^2}$$

65. $A \sec\alpha + B \sin\alpha \,.\, \operatorname{cosec}\alpha = C$

$$\cos\alpha = \frac{A}{C-B}$$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
66.	$A\,sec\,\alpha + B\cos\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{C^2-B^2}{B^2}\cos^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}\cos\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
67.	$A\,sec\,\alpha + B\cos\alpha\,.\,\cot\alpha = C$	$\cos^6\alpha + \frac{C^2}{B^2}\cos^4\alpha - \frac{2AC}{B^2}\cos^3\alpha + \frac{A^2-C^2}{B^2}\cos^2\alpha + \frac{2AC}{B^2}\cos\alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
68.	$A\,sec\,\alpha + B\cos\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{A}{C-B}$
69.	$A\,sec\,\alpha + B\cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2AC}{B^2+C^2}\cos^3\alpha + \frac{A^2-C^2}{B^2+C^2}\cos^2\alpha + \frac{2AC}{B^2+C^2}\cos\alpha - \frac{A^2}{B^2+C^2} = 0$
70.	$A\,sec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,\cot\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{A}{C-B}$
71.	$A\,sec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{2A}{C}\cos^3\alpha + \frac{A^2+B^2}{C^2}\cos^2\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$
72.	$A\,sec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{A+B}{C}$
73.	$A\,sec\,\alpha + B\cot\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$\sin^4\alpha - \frac{2B}{C}\sin^3\alpha + \frac{A^2+B^2-C^2}{C^2}\sin^2\alpha + \frac{2B}{C}\sin\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$
74.	$A\,sec\,\alpha + B\cot\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{A-B}{C}\cos^2\alpha - \cos\alpha + \frac{A}{C} = 0$
75.	$A\,sec\,\alpha + B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{A^2-C^2}{C^2}\sin^2\alpha + \frac{2AB}{C^2}\sin\alpha + \frac{B^2}{C^2} = 0$
76.	$A\,cosec\,\alpha + B\sin\alpha\,.\,\cos\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \sin^4\alpha + \frac{C^2}{B^2}\sin^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}\sin\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
77. $A\,cosec\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^6\alpha + \frac{C^2}{B^2}sin^4\alpha - \frac{2AC}{B^2}sin^3\alpha + \frac{A^2-C^2}{B^2}sin^2\alpha + \frac{2AC}{B^2}sin\,\alpha - \frac{A^2}{B^2} = 0$
78. $A\,cosec\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin^4\alpha + \frac{C^2-B^2}{B^2}sin^2\alpha - \frac{2AC}{B^2}sin\,\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
79. $A\,cosec\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2AC}{B^2+C^2}sin^3\alpha + \frac{A^2-C^2}{B^2+C^2}sin^2\alpha + \frac{2AC}{B^2+C^2}sin\,\alpha - \frac{A^2}{B^2+C^2} = 0$
80. $A\,cosec\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{A}{C-B}$
81. $A\,cosec\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{2B}$
82. $A\,cosec\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{-C \pm \sqrt{(4AB+4B^2+C^2)}}{2B}$
83. $A\,cosec\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{A}{C-B}$
84. $A\,cosec\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \frac{-AB \pm C\sqrt{(B^2+C^2-A^2)}}{B^2+C^2}$
85. $A\,cosec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin^3\alpha + \frac{B-A}{C}sin^2\alpha - sin\,\alpha + \frac{A}{C} = 0$
86. $A\,cosec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2A}{C}sin^3\alpha + \frac{A^2+B^2-C^2}{C^2}sin^2\alpha + \frac{2A}{C}sin\,\alpha - \frac{A^2}{C^2} = 0$
87. $A\,cosec\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{A+B}{C}$
88. $A\,cosec\,\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{A+B}{C}$
89. $A\,cosec\,\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{2A}{C}sin^3\alpha + \frac{A^2+B^2}{C^2}sin^2\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
90. $A \, cosec\, \alpha + B \, sec\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = C$	$cos^4 \alpha + \frac{A^2 - C^2}{C^2} cos^2 \alpha + \frac{2AB}{C^2} cos\, \alpha + \frac{B^2}{C^2} = 0$

e) Form: $A F^2(\alpha) + B F'(\alpha) \,.\, F''(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A \, sin^2 \alpha + B \, sin\, \alpha \,.\, cos\, \alpha = C$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{B^2 + 2AC \pm B\sqrt{(B^2 + 4AC - 4C^2)}}{2(A^2 + B^2)}\right)}$
2. $A \, sin^2 \alpha + B \, sin\, \alpha \,.\, tang\, \alpha = C$	$cos^3 \alpha + \frac{B}{A} cos^2 \alpha + \frac{C - A}{A} cos\, \alpha - \frac{B}{A} = 0$
3. $A \, sin^2 \alpha + B \, sin\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = C$	$cos\, \alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2 - 4AC)}}{2A}$
4. $A \, sin^2 \alpha + B \, sin\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = C$	$sin^6 \alpha - \frac{2C + A}{A} sin^4 \alpha + \frac{B^2 + C^2 + 2AC}{A^2} sin^2 \alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$
5. $A \, sin^2 \alpha + B \, sin\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = C$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{C - B}{A}\right)}$
6. $A \, sin^2 \alpha + B \, cos\, \alpha \,.\, tang\, \alpha = C$	$sin\, \alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2A}$
7. $A \, sin^2 \alpha + B \, cos\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = C$	$sin^3 \alpha - \frac{B}{A} sin^2 \alpha - \frac{C}{A} sin\, \alpha + \frac{B}{A} = 0$
8. $A \, sin^2 \alpha + B \, cos\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = C$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{C - B}{A}\right)}$
9. $A \, sin^2 \alpha + B \, cos\, \alpha \,.\, cosec\, \alpha = C$	$sin^6 \alpha - \frac{2C}{A} sin^4 \alpha + \frac{C^2 + B^2}{A^2} sin^2 \alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
10. $A \, sin^2 \alpha + B \, tang\, \alpha \,.\, cot\, \alpha = C$	$sin\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{C - B}{A}\right)}$
11. $A \, sin^2 \alpha + B \, tang\, \alpha \,.\, sec\, \alpha = C$	$sin^4 \alpha - \frac{A + C}{A} sin^2 \alpha - \frac{B}{A} sin\, \alpha + \frac{C}{A} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
12.	$A \sin^2\alpha + B \, tang\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$\cos^3\alpha + \frac{C-A}{A}\cos\alpha - \frac{B}{A} = 0$
13.	$A \sin^2\alpha + B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{C}{A}\sin\alpha + \frac{B}{A} = 0$
14.	$A \sin^2\alpha + B \cot\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{C-2A}{A}\cos^2\alpha + \frac{B}{A}\cos\alpha + \frac{A-C}{A} = 0$
15.	$A \sin^2\alpha + B \sec\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$\sin^8\alpha - \frac{A+2C}{A}\sin^6\alpha + \frac{C^2+2AC}{A^2}\sin^4\alpha - \frac{C^2}{A^2}\sin\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
16.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha = C$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{B^2+2AC \pm B\sqrt{(B^2+4AC-4C^2)}}{2(A^2+B^2)}\right)}$
17.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \,.\, tang\,\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{B}{A}\cos^2\alpha - \frac{C}{A}\cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
18.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC+B^2)}}{2A}$
19.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$tang^3\alpha - \frac{C}{B}\,tang^2\alpha + tang\,\alpha + \frac{A-C}{B} = 0$
20.	$A \cos^2\alpha + B \sin\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
21.	$A \cos^2\alpha + B \cos\alpha \,.\, tang\,\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2-4AC+B^2)}}{2A}$
22.	$A \cos^2\alpha + B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\sin^3\alpha + \frac{B}{A}\sin^2\alpha + \frac{C-A}{A}\sin\alpha - \frac{B}{A} = 0$
23.	$A \cos^2\alpha + B \cos\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
24.	$A \cos^2\alpha + B \cos\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$\cot^3\alpha + \frac{A-C}{B}\cot^2\alpha + \cot\alpha - \frac{C}{B} = 0$
25.	$A \cos^2\alpha + B \, tang\,\alpha \,.\, \cot\alpha = C$	$\cos\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
26.	$A \cos^2\alpha + B \, tang\,\alpha \,.\, \sec\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{C-2A}{A}\sin^2\alpha + \frac{B}{A}\sin\alpha + \frac{A-C}{A} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
27. $A\cos^2\alpha + B\,tang\,\alpha \cdot cosec\,\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{C}{A}\cos\alpha + \frac{B}{A} = 0$
28. $A\cos^2\alpha + B\cot\alpha \cdot \sec\alpha = C$	$\sin^3\alpha + \frac{C-A}{A}\sin\alpha - \frac{B}{A} = 0$
29. $A\cos^2\alpha + B\cot\alpha \cdot cosec\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha - \frac{A+C}{A}\cos^2\alpha - \frac{B}{A}\cos\alpha + \frac{C}{A} = 0$
30. $A\cos^2\alpha + B\sec\alpha \cdot cosec\,\alpha = C$	$\cos^8\alpha - \frac{2C+A}{A}\cos^6\alpha + \frac{C^2+2AC}{A^2}\cos^4\alpha - \frac{C^2}{A^2}\cos^2\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
31. $A\,tang^2\alpha + B\sin\alpha \cdot \cos\alpha = C$	$tang^4\alpha + \frac{A-C}{A}tang^2\alpha + \frac{B}{A}tang\,\alpha - \frac{C}{A} = 0$
32. $A\,tang^2\alpha + B\sin\alpha \cdot tang\,\alpha = C$	$\cos^3\alpha + \frac{A+C}{B}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \frac{A}{B} = 0$
33. $A\,tang^2\alpha + B\sin\alpha \cdot \cot\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{A+C}{B}\cos^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
34. $A\,tang^2\alpha + B\sin\alpha \cdot \sec\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC+B^2)}}{2A}$
35. $A\,tang^2\alpha + B\sin\alpha \cdot cosec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
36. $A\,tang^2\alpha + B\cos\alpha \cdot tang\,\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{A+C}{B}\sin^2\alpha - \sin\alpha + \frac{C}{B} = 0$
37. $A\,tang^2\alpha + B\cos\alpha \cdot \cot\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{A+C}{B}\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha - \frac{C}{B}\sin\alpha + 1 = 0$
38. $A\,tang^2\alpha + B\cos\alpha \cdot \sec\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
39. $A\,tang^2\alpha + B\cos\alpha \cdot cosec\,\alpha = C$	$tang^3\alpha - \frac{C}{A}tang\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
40. $A\,tang^2\alpha + B\,tang\,\alpha \cdot \cot\alpha = C$	$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
41. $A\,tang^2\alpha + B\,tang\,\alpha \cdot \sec\alpha = C$	$\sin\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC+4C^2+B^2)}}{2(A+C)}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
42.	$A\,tang^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cos\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2 + B^2 + 4AC)}}{2(A+C)}$
43.	$A\,tang^2\alpha + B\cot\alpha\,.\sec\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{B}{A+C}\sin^2\alpha - \frac{C}{A+C}\sin\alpha + \frac{B}{A+C} = 0$
44.	$A\,tang^2\alpha + B\cot\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{B}{A+C}\cos^3\alpha - \frac{2A+C}{A+C}\cos^2\alpha + \frac{A}{A+C} = 0$
45.	$A\,tang^2\alpha + B\sec\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$tang^3\alpha + \frac{B}{A}tang^2\alpha - \frac{C}{A}tang\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
46.	$A\cot^2\alpha + B\sin\alpha\,.\cos\alpha = C$	$\cot^4\alpha + \frac{A-C}{A}\cot^2\alpha + \frac{B}{A}\cot\alpha - \frac{C}{A} = 0$
47.	$A\cot^2\alpha + B\sin\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{A+C}{B}\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - \frac{C}{B}\cos\alpha + 1 = 0$
48.	$A\cot^2\alpha + B\sin\alpha\,.\cot\alpha = C$	$\cos^3\alpha - \frac{A+B}{B}\cos^2\alpha - \cos\alpha + \frac{C}{B} = 0$
49.	$A\cot^2\alpha + B\sin\alpha\,.\sec\alpha = C$	$\cot^3\alpha - \frac{C}{A}\cot\alpha + \frac{B}{A} = 0$
50.	$A\cot^2\alpha + B\sin\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cot\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
51.	$A\cot^2\alpha + B\cos\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$\sin^3\alpha - \frac{A+C}{B}\sin^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
52.	$A\cot^2\alpha + B\cos\alpha\,.\cot\alpha = C$	$\sin^3\alpha + \frac{A+C}{B}\sin^2\alpha - \sin\alpha - \frac{A}{B} = 0$
53.	$A\cot^2\alpha + B\cos\alpha\,.\sec\alpha = C$	$\cot\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
54.	$A\cot^2\alpha + B\cos\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$\cot\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2A}$
55.	$A\cot^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\cot\alpha = C$	$\cot\alpha = \sqrt{\left(\frac{C-B}{A}\right)}$
56.	$A\cot^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\sec\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{B}{A+C}\sin^3\alpha - \frac{2A+C}{A+C}\sin^2\alpha + \frac{A}{A+C} = 0$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
57.	$A\,cot^2\alpha + B\,tang\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$cos^3\alpha - \frac{B}{A+C}cos^2\alpha - \frac{C}{A+C}cos\,\alpha + \frac{B}{A+C} = 0$
58.	$A\,cot^2\alpha + B\,cot\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4A^2+B^2+4AC)}}{2(A+C)}$
59.	$A\,cot^2\alpha + B\,cot\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC+4C^2+B^2)}}{2(A+C)}$
60.	$A\,cot^2\alpha + B\,sec\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$cot^3\alpha + \frac{B}{A}cot^2\alpha - \frac{C}{A}cot\,\alpha + \frac{B}{A} = 0$
61.	$A\,sec^2\alpha + B\,sin\,\alpha \,.\, cos\,\alpha = C$	$cos^8\alpha - cos^6\alpha + \frac{C^2}{B^2}cos^4\alpha - \frac{2AC}{B^2}cos^2\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
62.	$A\,sec^2\alpha + B\,sin\,\alpha \,.\, tang\,\alpha = C$	$cos^3\alpha + \frac{C}{B}cos^2\alpha - cos\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
63.	$A\,sec^2\alpha + B\,sin\,\alpha \,.\, cot\,\alpha = C$	$cos^3\alpha - \frac{C}{B}cos^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
64.	$A\,sec^2\alpha + B\,sin\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = C$	$tang\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC-4A^2+B^2)}}{2A}$
65.	$A\,sec^2\alpha + B\,sin\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
66.	$A\,sec^2\alpha + B\,cos\,\alpha \,.\, tang\,\alpha = C$	$sin^3\alpha - \frac{C}{B}sin^2\alpha - sin\,\alpha + \frac{C-A}{B} = 0$
67.	$A\,sec^2\alpha + B\,cos\,\alpha \,.\, cot\,\alpha = C$	$sin^4\alpha - \frac{C}{B}sin^3\alpha - 2\,sin^2\alpha + \frac{A-C}{B}sin\,\alpha + 1 = 0$
68.	$A\,sec^2\alpha + B\,cos\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
69.	$A\,sec^2\alpha + B\,cos\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = C$	$cot^3\alpha + \frac{A-C}{B}cot^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
70.	$A\,sec^2\alpha + B\,tang\,\alpha \,.\, cot\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
71.	$A\,sec^2\alpha + B\,tang\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2+4C^2-4AC)}}{2C}$

	Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
72.	$A\,sec^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(4AC + B^2)}}{2C}$
73.	$A\,sec^2\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^3\alpha - \frac{B}{C}\,sin^2\alpha + \frac{A-C}{C}\,sin\,\alpha + \frac{B}{C} = 0$
74.	$A\,sec^2\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos^4\alpha + \frac{B}{C}\,cos^3\alpha - \frac{A+C}{C}\,cos^2\alpha + \frac{A}{C} = 0$
75.	$A\,sec^2\alpha + B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos^6\alpha - \frac{C+2A}{C}\,cos^4\alpha + \frac{A^2+B^2+2AC}{C^2}\,cos^2\alpha - \frac{A^2}{C^2} = 0$
76.	$A\,cosec^2\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = C$	$sin^8\alpha - sin^6\alpha + \frac{C^2}{B^2}\,sin^4\alpha - \frac{2AC}{B^2}\,sin^2\alpha + \frac{A^2}{B^2} = 0$
77.	$A\,cosec^2\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$cos^4\alpha + \frac{C}{B}\,cos^3\alpha - 2\,cos^2\alpha + \frac{A-C}{B}\,cos\,\alpha + 1 = 0$
78.	$A\,cosec^2\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$cos^3\alpha - \frac{C}{B}\,cos^2\alpha - cos\,\alpha + \frac{C-A}{B} = 0$
79.	$A\,cosec^2\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$tang^3\alpha + \frac{A-C}{B}\,tang^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
80.	$A\,cosec^2\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
81.	$A\,cosec^2\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^3\alpha - \frac{C}{B}\,sin^2\alpha + \frac{A}{B} = 0$
82.	$A\,cosec^2\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin^3\alpha + \frac{C}{B}\,sin^2\alpha - sin\,\alpha - \frac{A}{B} = 0$
83.	$A\,cosec^2\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
84.	$A\,cosec^2\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cot\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4AC - 4A^2 + B^2)}}{2A}$
85.	$A\,cosec^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{A}{C-B}\right)}$
86.	$A\,cosec^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin^4\alpha + \frac{B}{C}\,sin^3\alpha - \frac{A+C}{C}\,sin^2\alpha + \frac{A}{C} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
87. $A\,cosec^2\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos^3\alpha - \frac{B}{C}cos^2\alpha + \frac{A-C}{C}cos\,\alpha + \frac{B}{C} = 0$
88. $A\,cosec^2\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$sin\,\alpha = \frac{B \pm \sqrt{(B^2+4AC)}}{2C}$
89. $A\,cosec^2\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$cos\,\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{(4C^2-4AC+B^2)}}{2C}$
90. $A\,cosec^2\alpha + B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin^6\alpha - \frac{C+2A}{C}sin^4\alpha + \frac{A^2+B^2+2AC}{C^2}sin^2\alpha - \frac{A^2}{C^2} = 0$

f) Form: $A\,F(\alpha)\,.\,F^{I}(\alpha) + B\,F^{II}(\alpha)\,.\,F^{III}(\alpha) = C$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
1. $A\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha + B\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha = C$	$sin^6\alpha - \frac{2B}{A}sin^5\alpha + \frac{B^2-2A^2}{A^2}sin^4\alpha + \frac{2B}{A}sin^3\alpha + \frac{A^2+C^2}{A^2}sin^2\alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$
2. $A\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$cos^6\alpha - \frac{2B}{A}cos^5\alpha + \frac{B^2-2A^2}{A^2}cos^4\alpha + \frac{2B}{A}cos^3\alpha + \frac{A^2+C^2}{A^2}cos^2\alpha - \frac{C^2}{A^2} = 0$
3. $A\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha + B\,tang\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = C$	$cos^8\alpha - cos^6\alpha + \frac{2B}{A}cos^5\alpha + \frac{C^2}{A^2}cos^4\alpha - \frac{2B}{A}cos^3\alpha + \frac{B^2}{A^2}cos^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
4. $A\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha + B\,cot\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin^8\alpha - sin^6\alpha + \frac{2B}{A}sin^5\alpha + \frac{C^2}{A^2}sin^4\alpha - \frac{2B}{A}sin^3\alpha + \frac{B^2}{A^2}sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
5. $A\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha + B\,sec\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = C$	$sin\,2\alpha = \frac{C \pm \sqrt{(C^2-4AB)}}{A}$
6. $A\,sin\,\alpha\,.\,tang\,\alpha + B\,cos\,\alpha\,.\,cot\,\alpha = C$	$sin^6\alpha + \frac{2BC}{A^2+B^2}sin^5\alpha + \frac{C^2-3B^2}{A^2+B^2}sin^4\alpha - \frac{4BC}{A^2+B^2}sin^3\alpha - \frac{C^2-3B^2}{A^2+B^2}sin^2\alpha + \frac{2BC}{A^2+B^2}sin\,\alpha - \frac{B^2}{A^2+B^2} = 0$

Gegebene Gleichung:	Entwickelte Gleichung:
7. $A \sin\alpha . \tang\alpha + B \tang\alpha . \sec\alpha = C$	$\cos^6\alpha + \frac{2C}{A}\cos^5\alpha - \frac{2A^2+C^2}{A^2}\cos^4\alpha - \frac{2C}{A}\cos^3\alpha + \frac{A^2+B^2}{A^2}\cos^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
8. $A \sin\alpha . \tang\alpha + B \cot\alpha . \cosec\alpha = C$	$\cos^4\alpha + \frac{C}{A}\cos^3\alpha + \frac{B-2A}{A}\cos^2\alpha - \frac{C}{A}\cos\alpha + 1 = 0$
9. $A \sin\alpha . \tang\alpha + B \sec\alpha . \cosec\alpha = C$	$\sin^6\alpha + \frac{C^2}{A^2}\sin^4\alpha + \frac{2B}{A}\sin^3\alpha - \frac{C^2}{A^2}\sin^2\alpha + \frac{B^2}{A^2} = 0$
10. $A \cos\alpha . \cot\alpha + B \tang\alpha . \sec\alpha = C$	$\sin^4\alpha + \frac{C}{A}\sin^3\alpha - \frac{2A+B}{A}\sin^2\alpha - \frac{C}{A}\sin\alpha + 1 = 0$
11. $A \cos\alpha . \cot\alpha + B \cot\alpha . \cosec\alpha = C$	$\sin^6\alpha - \frac{2C}{A}\sin^5\alpha + \frac{C^2-2A^2}{A^2}\sin^4\alpha - \frac{2C}{A}\sin^3\alpha + \frac{A^2+B^2}{A^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{A^2} = 0$
12. $A \cos\alpha . \cot\alpha + B \sec\alpha . \cosec\alpha = C$	$\cos^6\alpha + \frac{C^2}{A^2}\cos^4\alpha + \frac{2B}{A}\cos^3\alpha - \frac{C^2}{A^2}\cos^2\alpha + \frac{B^2}{C^2} = 0$
13. $A \tang\alpha . \sec\alpha + B \cot\alpha . \cosec\alpha = C$	$\sin^8\alpha + \frac{2A}{C}\sin^7\alpha + \frac{A^2+B^2-2C^2}{C^2}\sin^6\alpha - \frac{2A}{C}\sin^5\alpha + \frac{C^2-3B^2}{C^2}\sin^4\alpha + \frac{3B^2}{C^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$
14. $A \tang\alpha . \sec\alpha + B \sec\alpha . \cosec\alpha = C$	$\sin^6\alpha + \frac{2A}{C}\sin^5\alpha + \frac{A^2-2C^2}{C^2}\sin^4\alpha - \frac{2A}{C}\sin^3\alpha + \frac{B^2+C^2}{C^2}\sin^2\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$

Gegebene Gleichung: **Entwickelte Gleichung:**

15. $A\,cot\,\alpha . cosec\,\alpha + B\,sec\,\alpha . cosec\,\alpha = C$ $\quad cos^6\,\alpha + \frac{2A}{C} cos^5\,\alpha + \frac{A^2 - 2C^2}{C^2} cos^4\,\alpha - \frac{2A}{C} cos^3\,\alpha + \frac{C^2 + B}{C^2} cos^2\,\alpha - \frac{B^2}{C^2} = 0$

Anmerkung. Wenn man alle Combinationen durchführen wollte, welche diese allgemeine Form zuläfst, so würde man 225 Gleichungen haben; allein die meisten lassen sich auf Gleichungen zurückführen, welche schon früher entwickelt sind; daher sie hier weggelassen worden. Man befrage darüber nachfolgende Tabelle. Die bei den Produkten angegebenen Gröfsen sind einfachere Werthe derselben. Die in den Columnen befindlichen Nummern beziehen sich auf die hier vorstehenden Gleichungen. Columnen, welche hingegen das Zeichen — enthalten, zeigen an, dafs die Auflösung der entsprechenden Gleichung schon aus der Beschaffenheit der gegebenen Funktionen von selbst erhelle.

Schlufs-Bemerkungen.

In sämmtlichen ausgeführten Gleichungen sind die Gröfsen A, B und C willkührliche Faktoren, welche jeden positiven und negativen Werth, Null nicht ausgeschlossen, haben können. Der Radius ist überall = 1 angenommen worden, man wird ihn in den meisten Fällen nicht in Rechnung zu ziehen brauchen. Sollte es indessen doch irgendwo nothwendig oder wünschenswerth seyn, ihn einzuführen, so dient dazu das Gesetz der Homogenität aller Glieder, dessen die Einleitung Erwähnung thut.

Um die entwickelten allgemeinen Gleichungen in ihrem ganzen Umfange benutzen zu können, ist es nöthig, die vorhabende concrete Gleichung so zu gestalten, dafs sie die möglichst einfachste Form erhalte, und keine trigonometrische Funktion mehr in den Nennern vorkomme. Man wird dieses durch die Tabellen VII. A und B, welche die Werthe für die Produkte und Quotienten zweier Funktionen angeben, leicht bewerkstelligen können. Wenn in der Gleichung Funktionen der Summe oder Differenz zweier Bogen vorkommen, so müssen diese zuvor nach Tabelle XII. entwickelt und gehörigen Orts eingeführt werden.

Man wird in den meisten Fällen mit den angeführten Formen ausreichen. Auch die Gleichungen, welche trigonometrische Funktionen in drei oder mehreren Gliedern enthalten, können gröfstentheils durch zweckmäfsige Substitutionen so umgestaltet werden, dafs sie sich unter die entwickelten Formen bringen lassen.

Z. B. aus der Gleichung:

$$A \sin^2 \alpha + B \cos \alpha = C \sin \alpha$$

wird: $A \sin \alpha + \frac{B \cos \alpha}{\sin \alpha} = C$

und ferner:

$$A \sin \alpha + B \cot \alpha = C$$

Oder aus der Gleichung:

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = C \tang \alpha$$

wird: $A + B \cot \alpha = C \sec \alpha$

Oder aus der Gleichung:

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = C \tang \alpha + D \sin \alpha . \sec \alpha$$

wird: $A \sin \alpha + B \cos \alpha = (C + D) \tang \alpha$

und ferner:

$$A + B \cot \alpha = (C + D) \sec \alpha$$

Bei denjenigen Combinationen, deren Entwickelung auf höhere Gleichungen führte, sind diese Gleichungen selbst aufgenommen und der numerischen Bearbeitung für jeden gegebenen Fall anheim gestellt worden. Man kann bei Entwickelung trigonometrischer Gleichungen als Gesetz annehmen: dafs man schwerlich durch künstliche Methoden eine Gleichung von einem geringeren Grade erhalten wird, als welche sich schon durch Substitution der einfachsten, gleichartigen Werthe für die verschiedenen trigonometrischen Funktionen ergab. Höchstens wird man in manchen Fällen ein Wurzelzeichen zu vermeiden im Stande seyn.

Da sämmtliche Werthe einer Funktion immer auf den einfachsten derselben beruhen, so ist es für die Auflösung der Gleichungen ganz gleichgültig, welche Werthe man für die verschiedenen Funktionen substituiren will; die entstehende Gleichung wird immer von dem nämlichen Grade seyn.

Soll nun aus einer dieser höheren Gleichungen die trigonometrische Funktion wirklich entwickelt werden, so kann man sich dazu der, in der Analysis gebräuchlichen Methoden bedienen. Es wird indessen dabei am vortheilhaftesten seyn, jederzeit die *Sinus* oder *Cosinus* des zu suchenden Bogens als die unbekannte Gröfse einzuführen, da hier die festen Gränzen zwischen 0 und 1 die Approximations-Auflösung sehr erleichtern.

Berichtigungen und Druckfehler.

Seite 36. VII. A. Es findet sich hier π so angegeben wie es in mehreren Lehrbüchern, unter andern in Vega II. 111 ff. ausgedrückt wird.

Durch andere Angaben ist dieser Decimalbruch aber bis auf 154 Stellen fortgesetzt worden, welche dann von der 136sten an, folgendermaſsen lauten:

317253594081284803 . . . .

(vergl. Kästner geometrische Abhandlungen. 2te Sammlung 181. 182., und dessen Anfangsgründe der Mathematik I. 331.)

— 76. D. No. 1. statt $2a^3 \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} a^3}$
lies: $2a^3 \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin^3 \frac{1}{2} \alpha}$

— 92. No. 20. muſs der logarithmische Ausdruck als unrichtig und unstatthaft wegfallen.

— 98. No. 14. statt $(a-b) \sec \alpha$ lies: $(a-b) \operatorname{cosec} \alpha$

— 129. C No. 5. statt $\sin a$ lies: $\sin \alpha$

— — - No. 6. desgl.

— 130. No. 12. gilt das Wurzelzeichen nur für den Zähler und nicht für den Nenner.

— — No. 21. und 22. statt

der $\angle \beta$	21. $\operatorname{tang} \beta = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$ oder 22. unter obigen Voraussetzungen $\angle \beta = \varphi - \psi$

lies:

der $\angle \gamma$	21. $\operatorname{tang} \gamma = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$ oder 22. unter obigen Voraussetzungen $\angle \gamma = \varphi - \psi$

— 131. No. 27. statt $\frac{c \sin \alpha}{\alpha}$

lies $\frac{c \sin \alpha}{a}$

— 151. No. 6. der Ausdruck $\cot \frac{1}{2} a = \frac{\cot \frac{1}{2}(b-c) . \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}$ ist für den vorgesetzten Zweck nicht brauchbar, da der $\angle \beta$ nicht gegeben ist. Man ersetze daher denselben durch folgenden:

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\sin b . \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + \sin^2 \tfrac{1}{2}(b-c)}$$

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn in Berlin.

Formen, zu welchen diese Gleichungen führen

$A \sin\alpha \,.\, \cos\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$ $\sec\alpha$	$A \cot\alpha \,.\, \sec\alpha$ $= A\,\mathrm{cosec}\,\alpha$	$A \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	$A \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$	
—	—	No. 4.	No. 5.	$+B \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$
No. 1.	—	No. 8.	No. 9.	$+B \sin\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\alpha$
—	—	—	—	$+B \sin\alpha \,.\, \cot\alpha = B \cos\alpha$
—	—	—	—	$+B \sin\alpha \,.\, \sec\alpha = B\,\mathrm{tang}\,\alpha$
—	—	—	—	$+B \sin\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha = B$
—	—	—	—	$+B \cos\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\alpha = B \sin\alpha$
No. 2.	—	No. 11.	No. 12.	$+B \cos\alpha \,.\, \cot\alpha$
—	—	—	—	$+B \cos\alpha \,.\, \sec\alpha = B$
—	—	—	—	$+B \cos\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha = B \cot\alpha$
—	—	—	—	$+B\,\mathrm{tang}\,\alpha \,.\, \cot\alpha = B$
No. 3.	—	No. 13.	No. 14.	$+B\,\mathrm{tang}\,\alpha \,.\, \sec\alpha$
—	—	—	—	$+B\,\mathrm{tang}\,\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha = B \sec\alpha$
—	—	—	—	$+B \cot\alpha \,.\, \sec\alpha = B\,\mathrm{cosec}\,\alpha$
No. 4.	—	—	No. 15.	$+B \cot\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$
No. 5.	—	No. 14.	—	$+B \sec\alpha \,.\, \mathrm{cosec}\,\alpha$